



저작자표시-비영리-변경금지 2.0 대한민국

이용자는 아래의 조건을 따르는 경우에 한하여 자유롭게

- 이 저작물을 복제, 배포, 전송, 전시, 공연 및 방송할 수 있습니다.

다음과 같은 조건을 따라야 합니다:



저작자표시. 귀하는 원저작자를 표시하여야 합니다.



비영리. 귀하는 이 저작물을 영리 목적으로 이용할 수 없습니다.



변경금지. 귀하는 이 저작물을 개작, 변형 또는 가공할 수 없습니다.

- 귀하는, 이 저작물의 재이용이나 배포의 경우, 이 저작물에 적용된 이용허락조건을 명확하게 나타내어야 합니다.
- 저작권자로부터 별도의 허가를 받으면 이러한 조건들은 적용되지 않습니다.

저작권법에 따른 이용자의 권리는 위의 내용에 의하여 영향을 받지 않습니다.

이것은 [이용허락규약\(Legal Code\)](#)을 이해하기 쉽게 요약한 것입니다.

[Disclaimer](#)

공학박사 학위논문

유사 선형 구간에서 라플라스-
푸리에 영역 파형역산의 정량적 분석

**Quantitative analysis of Laplace-Fourier-domain
waveform inversion in quasi-linear zones**

2018 년 2 월

서울대학교 대학원

에너지시스템공학부

진 효 준

유사 선형 구간에서 라플라스-푸리에 영역
파형역산의 정량적 분석

**Quantitative analysis of Laplace-Fourier-domain
waveform inversion in quasi-linear zones**

지도 교수 신 창 수

이 논문을 공학박사 학위논문으로 제출함
2017년 11월

서울대학교 대학원
에너지시스템공학부
진효준

진효준의 공학박사 학위논문을 인준함
2017년 12월

위 원 장 _____ (인)

부위원장 _____ (인)

위 원 _____ (인)

위 원 _____ (인)

위 원 _____ (인)

초 록

성공적인 지하구조 영상화를 위해 정확한 지하 속도 모델 구축은 필수적이다. 지하 속도모델을 추정하기 위해 전통적인 방법으로 반사파 토모그래피, 구조보정 속도 분석 등의 방법이 있지만 이런 전통적인 방식은 사용자의 선택에 좌우되는 주관적인 결과를 주며, 낮은 해상도의 결과물을 제공한다. 반면 파동 방정식을 기반으로 탐사자료의 모든 파형을 고려하는 완전파형역산은 기존의 방식보다 높은 해상도와 상대적으로 객관적인 결과를 제공한다. 하지만 완전파형역산은 초기속도모델에 민감한 문제를 가지고 있다. 일반적으로 사용하는 주파수 영역 파형역산은 취득된 자료의 저주파수 성분의 부재로 이러한 초기속도모델에 대한 민감한 문제를 직접적으로 해결할 수 없다. 하지만 복소 주파수를 사용하여 감쇠된 파동장을 활용하는 라플라스-푸리에 영역 파형역산은 기존의 주파수 영역 파형역산보다 이러한 초기속도모델 문제에 대하여 덜 민감하고 취득된 자료의 저주파수 성분이 없어도 장파장 속도모델을 구축할 수 있다는 장점이 있다. 이러한 이유는 감쇠된 파동장의 저주파수 성분이 새롭게 생성되고 속도 모델의 그래디언트가 평활화되는 경향을 가지기 때문이라는 연구결과가 나와 있다. 하지만 저주파수의 생성과 단순히 장파장 성분의 그래디언트가 계산된다는 이유로 기존의 주파수 영역 파형역산 보다 라플라스-푸리에 영역 파형역산이 우수하다는 것은 단지 현상에만 입각한 분석이며 저주파수 성분 외의 자료에 대한 분석이 부족하다. 따라서 본 연구는 기존에 적용된 적 없던 라플라스-푸리에 영역과 주파수 영역의 모델 분해 행렬의 비교 및 분석과 각 영역에서의 자코비안 행렬의 특이값 분해를 통해 수치적으로 라플라스-푸리에 영역 파형역산이 주파수 영역 파형역산보다 우수한 성능을 보이는지 명확하게 분석하였다. 모델 분해 행렬은 선형 시스템의 안정성과 추정된 물성치가 얼마나 실제 물성치와 비슷한지를 판별하는 도구로서 지구물리학 외에 다양한 분야에서 많이 사용되고 있다. 본 연구는 저주파수를 사용할 수 없는 실제 상황을 고려하여 기존의 주파수 영역과 라플라스-푸리에 영역에서의 모델 분해 행렬을 비교하여

많은 복소 주파수를 사용할 때 그 성능이 가장 우수할 수 있다는 것을 확인하였다. 특이값 분해 또한 선형 혹은 비선형 시스템의 특징을 파악하는데 사용되는 도구로써 본 연구에서는 주파수 영역과 라플라스-푸리에 영역에서 구성되는 자코비안 행렬에 특이값 분해를 적용하여 그 특이값들을 분석하였다. 실험 결과, 모든 경우에서 라플라스-푸리에 영역 자코비안 행렬의 특이값들이 주파수 영역의 값보다 유의미한 값들을 많이 가지는 것을 확인할 수 있었다. 결과적으로, 저주파수를 사용하지 않는 경우에서 라플라스-푸리에 영역 파형역산이 기존의 주파수 영역 파형역산보다 우수할 수 있는 이유는 다양한 라플라스 감쇠 상수를 사용함으로써 제한된 자료에 다양한 변화를 주고 선형 독립 기저인 벡터들로 자코비안 행렬을 재구성하기 때문이다. 즉, 기존의 주파수 영역의 자코비안 행렬보다 라플라스-푸리에 영역의 자코비안 행렬은 상대적으로 많은 선형 독립 기저들로 구성되고, 이는 추정하고자하는 모델의 부분 공간을 더욱 많이 생성하게 되는 것이다. 또한 상대적으로 큰 특이값들로 구성된 라플라스-푸리에 영역 자코비안 행렬은 가우스-뉴턴법에 근거하여 모델을 추정할 경우, 헤시안 행렬의 역행렬 계산도 안정적으로 수행될 수 있음을 의미한다. 본 연구를 통해 기존의 주파수 대역을 복소 주파수로 사용함으로써 자료의 다양성을 늘리고 저주파수를 사용하지 않는 경우에서도 파형역산을 안정적으로 수행할 수 있다는 새로운 연구결과를 제시한다.

주요어 : 라플라스-푸리에 영역, 파형역산, 모델 분해 행렬, 특이값 분해

학 번 : 2015-31062

목 차

제 1 장 서론.....	1
1.1 연구의 배경.....	1
1.2 연구의 목적.....	7
1.3 연구의 구성.....	9
제 2 장 파형역산 이론.....	10
2.1 역산문제의 수치적 해법.....	11
2.2 주파수 및 라플라스-푸리에 파형역산 알고리즘	15
제 3 장 모델 분해 행렬과 특이값 분해.....	21
3.1 모델 분해 행렬.....	22
3.2 특이값 분해.....	31
제 4 장 수치 실험 예제	40
4.1 주파수 및 라플라스-푸리에 영역의 모델 분해 행렬 분석	40
4.2 주파수 및 라플라스-푸리에 영역의 특이값 분해 분석	50
4.3 2차원 인공합성자료 파형역산 결과.....	104
제 5 장 결 론.....	123
참고 문헌.....	127

그림 목차

그림 1. 송신원(source), 수신기(receiver), 산란매질(scattering media) 사이의 위치 관계와 방향벡터의 모식도.....	24
그림 2. 모델 분해 행렬 (Menke의 2012, Geophysical Data Analysis의 그림을 인용 및 수정함)	26
그림 3. Full SVD의 도식화 (행렬의 크기가 $m > n$ 인 경우).....	34
그림 4. compact SVD 혹은 reduced SVD의 도식화 (행렬의 크기가 $m > n$ 인 경우).....	34
그림 5. Truncated SVD의 도식화(행렬의 크기가 $m > n$ 인 경우).....	34
그림 6. 같은 조건수와 행렬 계수를 가지지만 완전히 다른 특이값들을 가지는 경우.....	39
그림 7. 모든 주파수 대역을 사용한 경우의 주파수 영역의 모델 분해 행렬	47
그림 8. 제한된 주파수 대역을 사용한 경우의 주파수 영역의 모델 분해 행렬.....	47
그림 9. 제한된 주파수 대역을 사용한 경우의 라플라스-푸리에 영역의 모델 분해 행렬 (1개의 라플라스 감쇠 상수 사용).....	48
그림 10. 제한된 주파수 대역을 사용한 경우의 라플라스-푸리에 영역의 모델 분해 행렬 (10개의 라플라스 감쇠 상수 사용).....	48
그림 11. 2차원 Marmousi2 P파 속도 모델	53
그림 12. Marmousi 2 P파 속도 모델의 3km 지점의 1차원 속도 모델	53
그림 13. 3차원 SEG/EAGE salt P파 속도 모델의 2차원 단면.....	54
그림 14. SEG/EAGE salt P파 속도 모델의 8.6km 지점의 1차원 속도 모델	54
그림 15. 2차원 층서 모델.....	55
그림 16. 2차원 비 이상체 모델.....	55
그림 17. Marmousi2 모델 실험에 사용된 3가지의 속도모델	60
그림 18. 단조선형증가모델을 초기속도모델로 사용한 경우의 주파수 영역과 라플라스-푸리에 영역의 자코비안 행렬의 특이값들 (라플라스 감쇠 상수 그룹1~4).....	62
그림 19. 그림 18을 구간별로 확대한 그림.....	63

그림 20. 균질한 속도모델을 초기속도모델로 사용한 경우의 주파수 영역과 라플라스-푸리에 영역의 자코비안 행렬의 특이값들 (라플라스 감쇠 상수 그룹1~4).....	64
그림 21. 그림 20을 구간별로 확대한 그림.....	65
그림 22. 평활화된 속도모델을 초기속도모델로 사용한 경우의 주파수 영역과 라플라스-푸리에 영역의 자코비안 행렬의 특이값들 (라플라스 감쇠 상수 그룹1~4).....	66
그림 23. 그림 22을 구간별로 확대한 그림.....	67
그림 24. 단조선형증가모델을 초기속도모델로 사용한 경우의 주파수 영역과 라플라스-푸리에 영역의 자코비안 행렬의 특이값들 (라플라스 감쇠 상수 그룹5~8).....	69
그림 25. 그림 24를 구간별로 확대한 그림.....	70
그림 26. 균질한 속도모델을 초기속도모델로 사용한 경우의 주파수 영역과 라플라스-푸리에 영역의 자코비안 행렬의 특이값들 (라플라스 감쇠 상수 그룹5~8).....	71
그림 27. 그림 26를 구간별로 확대한 그림.....	72
그림 28. 평활화된 속도모델을 초기속도모델로 사용한 경우의 주파수 영역과 라플라스-푸리에 영역의 자코비안 행렬의 특이값들 (라플라스 감쇠 상수 그룹5~8).....	73
그림 29. 그림 28을 구간별로 확대한 그림.....	74
그림 30. SEG/EAGE Salt 실험에 사용된 3가지의 속도모델	78
그림 31. 단조선형증가모델을 초기속도모델로 사용한 경우의 주파수 영역과 라플라스-푸리에 영역의 자코비안 행렬의 특이값들 (라플라스 감쇠상수 그룹1~4).....	79
그림 32. 그림 31을 구간별로 확대한 그림.....	80
그림 33. 균질한 속도모델을 초기속도모델로 사용한 경우의 주파수 영역과 라플라스-푸리에 영역의 자코비안 행렬의 특이값들 (라플라스 감쇠상수 그룹1~4).....	81
그림 34. 그림 33을 구간별로 확대한 그림.....	82
그림 35. 평활화된 속도모델을 초기속도모델로 사용한 경우의 주파수 영역과 라플라스-푸리에 영역의 자코비안 행렬의 특이값들 (라플라스 감쇠상수 그룹1~4).....	83
그림 36. 그림 35을 구간별로 확대한 그림.....	84
그림 37. 단조선형증가모델을 초기속도모델로 사용한 경우의 주파수 영역과 라플라스-푸리에 영역의 자코비안 행렬의 특이값들	

(라플라스 감쇠상수 그룹5~8).....	86
그림 38. 그림 37을 구간별로 확대한 그림.....	87
그림 39. 균질한 속도모델을 초기속도모델로 사용한 경우의 주 파수 영역과 라플라스-푸리에 영역의 자코비안 행렬의 특이값들 (라플라스 감쇠상수 그룹5~8).....	88
그림 40. 그림 39을 구간별로 확대한 그림.....	89
그림 41. 평활화된 속도모델을 초기속도모델로 사용한 경우의 주파수 영역과 라플라스-푸리에 영역의 자코비안 행렬의 특이값 들 (라플라스 감쇠상수 그룹5~8).....	90
그림 42. 그림 41을 구간별로 확대한 그림.....	91
그림 43. 2차원 특이값 분해 실험에 사용된 초기속도모델 (단조선형증가).....	95
그림 44. 2차원 특이값 분해 실험에 사용된 초기속도모델 (균질모델).....	95
그림 45. 2차원 지층 모델 실험에서 단조선형증가 속도 모델을 초기속도모델로 사용한 경우의 두 가지의 목적함수에 대한 주파 수 영역과 라플라스-푸리에 영역의 자코비안 행렬의 특이값들	96
그림 46. 2차원 지층 모델 실험에서 균질한 속도 모델을 초기속 도모델로 사용한 경우의 두 가지의 목적함수에 대한 주파수 영 역과 라플라스-푸리에 영역의 자코비안 행렬의 특이값들	97
그림 47. 2차원 비 이상체 모델 실험에서 단조선형증가 속도 모 델을 초기속도모델로 사용한 경우의 두 가지의 목적함수에 대한 주파수 영역과 라플라스-푸리에 영역의 자코비안 행렬의 특이값 들	101
그림 48. 2차원 비 이상체 모델 실험에서 균질한 속도 모델을 초 기속도모델로 사용한 경우의 두 가지의 목적함수에 대한 주파수 영역과 라플라스-푸리에 영역의 자코비안 행렬의 특이값들	102
그림 49. 바둑판 모델의 비 이상체의 격자 크기가 (a) 125m, (b) 250m, (c)500m, (d) 파형역산에 사용된 초기속도모델	109
그림 50. 125m간격 비 이상체의 크기를 가지는 바둑판 모델 파 형역산 결과; (a)로그목적함수를 사용한 주파수 영역, (b)로그목적 함수를 사용한 라플라스-푸리에 영역, (c)l2-norm목적함수를 사용 한 주파수 영역, (d)l2-norm목적함수를 사용한 라플라스-푸리에 영역	111
그림 51. 250m간격 비 이상체의 크기를 가지는 바둑판 모델 파 형역산 결과; (a)로그목적함수를 사용한 주파수 영역, (b)로그목적 함수를 사용한 라플라스-푸리에 영역, (c)l2-norm목적함수를 사용	

한 주파수 영역, (d)l2-norm목적함수를 사용한 라플라스-푸리에 영역	113
그림 52. 500m간격 비 이상체의 크기를 가지는 바둑판 모델 파 형역산 결과; (a)로그목적함수를 사용한 주파수 영역, (b)로그목적 함수를 사용한 라플라스-푸리에 영역, (c)l2-norm목적함수를 사용 한 주파수 영역, (d)l2-norm목적함수를 사용한 라플라스-푸리에 영역	115
그림 53. 2차원 BP benchmark 실제 P파 속도 모델	120
그림 54. 2차원 BP실험 초기 속도 모델	120
그림 55. 2차원 BP 실험 주파수 영역 파형역산 결과 (로그목적함수)	121
그림 56. 2차원 BP 실험 라플라스-푸리에 영역 파형역산 결과 (로그목적함수)	121
그림 57. 2차원 BP 실험 주파수 영역 파형역산 결과 (l2-norm 목적함수)	122
그림 58. 2차원 BP 실험 라플라스-푸리에 영역 파형역산 결과 (l2-norm 목적함수)	122

표 목차

표 1. 각 모델 분해 행렬의 퍼짐 정도.....	49
표 2. 라플라스 감쇠상수 그룹(최대 라플라스 감쇠상수는 고정, 단위: $s - 1$).....	61
표 3. 라플라스 감쇠상수 그룹(라플라스 감쇠상수 간격은 고정, 단위: $s - 1$).....	61
표 4. Marmousi 2 모델 실험에서 주파수 영역과 라플라스-푸리에 영역의 헤시안 행렬의 조건수(라플라스 감쇠상수 그룹1~4).....	68
표 5. Marmousi 2 모델 실험에서 주파수 영역과 라플라스-푸리에 영역의 헤시안 행렬의 조건수(라플라스 감쇠상수 그룹5~8).....	75
표 6. SEG/EAGE Salt 모델 실험에서 주파수 영역과 라플라스-푸 리에 영역의 헤시안 행렬의 조건수 (라플라스 감쇠상수 그룹1~4).....	85
표 7. SEG/EAGE Salt 모델 실험에서 주파수 영역과 라플라스-푸 리에 영역의 헤시안 행렬의 조건수 (라플라스 감쇠상수 그룹5~8).....	92
표 8. 2차원 지층 모델 실험에서 두 가지의 목적함수에 대한 주 파수 영역과 라플라스-푸리에 영역의 헤시안 행렬의 조건수	98
표 9. 2차원 비 이상체 모델 실험에서 두 가지의 목적함수에 대 한 주파수 영역과 라플라스-푸리에 영역의 헤시안 행렬의 조건수	103
표 10. 비 이상체 격자 간격에 따른 각 영역에서의 속도 모델 오차	116
표 11. BP 모델 실험에서 각 영역의 파형역산 결과에 대한 실제 모델과의 속도 모델 오차(model misfit).....	119

제 1 장 서 론

1.1 연구의 배경

정확한 지하 매질에 대한 정보(속도, 밀도, 이방성 계수 등)를 바탕으로 지하 매질을 영상화(imaging)하는 것은 지구물리학과 지질학에서 중요하게 다루는 연구 분야 중 하나이다. 정확한 지하 매질 영상화를 통해 우리는 석유 및 가스 부존 지역의 예측과 저류층 특성화 등 실제 석유 및 가스 생산에 큰 관여를 할 수 있다. 특히 P파 속도는 여러 지하 물성치 중 가장 중요한 정보로써 이를 정확하게 추정하기 위하여 많은 연구들이 진행되고 있다. 그 중에서 최근 지구물리학 학계 및 산업계에서 가장 주목 받고 있는 기술인 완전파형역산(full waveform inversion)은 파동 방정식(wave equation)을 기반으로 하여 지하 물성치를 고 해상도(high resolution)로 영상화하는 기술이다. Lailly(1983)과 Tarantola(1984)를 시작으로 파형역산은 역전파(back-propagation)의 개념을 도입한 파형역산 알고리즘이 소개되었다.

파형역산은 기본적으로 크게 시간 영역과 주파수 영역에서 실행할 수 있다. 시간 영역 파형역산의 경우, 높은 해상도의 결과를 얻을 수 있지만 많은 송신원(source)과 수신기(receiver)에 대하여 방대한 계산 량과 컴퓨터 메모리를 요구하고 실제 현장 자료에 사용된 송신원 파형(source wavelet)에 대한 정보를 추정 하는데 어려움이 있다(Mora 1987; Shipp & Singh 2002; Sheen *et al.*, 2006). 반면 주파수 영역 파형역산의 경우 시간 영역과 달리 많은 양의 송신원과 수신기를 병렬화 과정을 통해 효과적인 계산을 할 수 있다. 또한 사용되는 주파수의 송신원 파형에 대한 정보를 추정하기도 수월하다(Marfurt 1984; Pratt *et al.*, 1998; Shin & Min 2006). 주파수 영역 파형역산은 어떻게 주파수를 선택하고 어떤 방식으로 파형역산을 진행하느냐에 따라 그 효율성과 결과가 많이 달라진다.

이러한 주파수 선택 전략은 크게 3가지로 많은 연구들이 진행되었다. 첫 째로 여러 주파수들을 동시에 역산하는 방법(Lee & Kim 2003; Shin & Min 2006; Hu *et al.*, 2007), 하나의 주파수를 순차적으로 역산하는 방법(Sirgue & Pratt 2004; Ben-Hadj-Ali *et al.*, 2008), 마지막으로 위 두 가지 방법들을 조합하는 방법이 있다(Pratt 1999; Bleibinhaus *et al.*, 2008; Jaiswal *et al.*, 2008). 이 외에도 주파수 선택 전략은 많은 조합을 가지고 있다. 하지만 주로 낮은 주파수부터 역산하여 점차적으로 주파수를 높여 가는 방식의 전략이 주로 사용되고 있다(Bunks *et al.*, 1995). 하지만 현재의 탐사 기술력의 한계로 실제 현장자료에는 온전한 저주파수 성분이 존재하지 않아 사용할 수 없다(Symes, 2008).

파형역산 시스템은 아직 많은 문제점들을 가지고 있다. 우리가 다루는 파형역산 시스템은 비선형 문제(nonlinear problem)로 대부분의 해가 비-유일성(non-uniqueness)을 가진다. 또한 불량조건 문제(ill-posed problems)와 나쁜 조건의 문제(ill-conditioned problems)를 가지고 있다. 불량조건 문제(ill-posed problems)는 문제의 답이 존재하고, 그 해가 유일하며, 마지막으로 해가 초기 조건에 따라 연속적으로 변화하는 조건의 문제인 우량조건 문제(well-posed problems)의 세 가지 중 하나라도 만족하지 못하는 경우를 뜻한다. 또한 파형역산은 혼합 결정 문제(mixed-determined problem)에 속하는데 이는 미지수의 개수보다 관측자료가 많은 경우(overdetermined problem)와 반대로 미지수의 개수보다 관측자료의 개수가 적은 경우(under-determined problem)이 공존하는 경우이다. 나쁜 조건의 문제(ill-conditioned problems)는 자료상의 작은 변화 혹은 오차가 우리가 추정해 해에서 예상치 못한 큰 변화가 발생하는 경우이다. 대부분은 비선형 문제들은 나쁜 조건의 문제(ill-conditioned problems)를 포함 하고 있는데, 이를 해결하기 위해서는 적절한 반복적 수치 풀이 법 혹은 최적화 (optimization)와 정규화(regularization)과 같은 제약 조건이 필요하다 (Virieux & Operto, 2009). 가우스-뉴턴 법(Gauss-Newton method), 켈레 그래디언트(conjugate gradient)를 활용한 truncated 가우스-뉴턴 법, 유사 뉴턴 법(quasi-Newton method)인 (L-)BFGS법, 구배법(gradient method)등 다양한 방법들이 존재하며 아직도 많은 연구자들에 의해 개발되고 있다(Pratt *et al.*, 1998; Shin *et al.*, 2001;

Brossier *et al.*, 2009; Métivier *et al.*, 2013). 파형역산 특히 초기 모델에 민감한데 그 이유가 나쁜 조건의 문제(ill-conditioned problems) 때문이다(Snieder & Trampert, 1999).

또 하나의 파형역산의 문제점은 목적함수(objective function)가 가지는 국소 최저치(local minima)의 문제이다. 앞서 언급한 반복적 수치 풀이를 통해 목적함수의 전역 최저치(global minima)를 찾아가는데 국소 최저치는 큰 방해 요소 중 하나이다. 또한 실제 모델보다 먼 초기모델을 사용하는 경우, 시간 영역 파형역산에서 발생하는 사이클 스킵핑(cycle-skipping) 현상 혹은 주파수 영역 파형역산에서 발생하는 위상 래핑(phase wrapping) 현상은 국소 최저치 문제를 발생시키는 주된 요인 중 하나이다. 국소 최저치를 피하기 위해서는 저주파수 성분의 자료가 충분하거나 혹은 실제 모델에 근접한 초기 속도모델을 보유하여야한다. 파형역산에 사용되는 초기속도모델을 얻기 위해 다양한 방법들이 존재한다. 전통적으로는 반사파 토모그래피(reflection tomography)를 사용하여 장파장(long-wavelength) P파 속도를 추정하거나(Operto *et al.*, 2004; Brenders and Pratt, 2007) 구조보정 속도 분석(Migration velocity analysis)를 사용하여 추정하였다(Shen & Symes, 2008). 하지만 지형이 고속도층이나 복잡한 지형이 포함된 경우 초기속도모델을 추정하는 것은 매우 어렵다. 또한 괜찮은 초기속도모델을 얻더라도 이후에 수행되는 파형역산에서 합리적인 속도모델을 다시 추정하는 것 또한 아직 많은 어려움을 겪고 있다. 전통적인 방법 외에 파형역산을 기반으로 한 다양한 기술들 또한 개발되었다. Choi & Alkhalifah (2013)은 반사파를 감쇠시키기 위해 지수 함수를 사용하여 신호를 감쇠시켜 주파수 영역에서 위상 미분을 사용하는 파형역산 알고리즘을 제안하였다. 이들은 파형역산과 구조보정에 사용하기 좋은 초기 속도모델을 제공하였다. Chi *et al.*(2014)는 포락선(envelope) 기반의 목적함수를 설정하여 저주파수 성분이 부족한 자료에 대하여 장파장 성분의 속도모델을 제공하는 파형역산 알고리즘을 제시 하였다. 하지만 자료의 포락선을 목적함수로 사용하는 경우 신호의 위상을 정확하게 파악할 수 없다는 단점이 존재한다. 이 외에도 최소 제곱 합성 필터(least-squares convolutional filters)인 위너 필터 (Wiener filters)를 사용하여 기존의 파형역산 알고리즘을 재구성하여 정 전파

모델링(forward modeling)을 통해 얻은 수치 파동장(modeled wavefield)을 관측 자료와 같아지도록 만드는 방식의 알고리즘이 제시되었다(Warner *et al.*, 2016). 이 알고리즘은 특히 저주파수가 부족한 자료와 부정확한 송신 파형(source wavelet)을 사용한 경우에 대해서도 안정적인 결과를 제공하였다.

앞서 제시된 방법들을 외에 본 연구에서는 감쇠된 시간자료를 사용하는 라플라스 와 라플라스-푸리에 영역 파형역산 (Shin & Cha, 2008, 2009)을 중심으로 연구를 진행 하였다. 라플라스 파형역산은 복소 주파수(complex frequency)의 실수부만을 사용하여 관측 자료를 라플라스 변환(Laplace transform)하게 된다. 여기에 사용되는 라플라스 변환 커널(kernel)을 라플라스 감쇠 상수(Laplace damping constant)라고 한다. 라플라스 감쇠 상수를 큰 값을 사용하는 경우, 관측 자료의 초기 신호들이 상대적으로 강조되어 굴절파(refracted wave)와 다이빙 파(diving wave)를 활용하게 되어 장파장 성분의 초기속도모델을 제공할 수 있다. 라플라스 감쇠 상수가 작은 경우에는 관측 자료의 후기신호에 포함된 반사파(reflection wave)또한 고려할 수 있지만, 이는 파형역산에 사용되는 최적화 기법에 따라 그 결과가 달라 질 수 있다(Kwon *et al.*, 2016). 라플라스-푸리에 파형역산은 복소 주파수의 실수부와 허수부까지 모두 고려하여 감쇠된 파동장의 저주파수 성분부터 고주파수 성분까지 모두 사용하여 장파장 성분부터 단파장 성분까지 고려한 속도모델을 구축할 수 있다. 이 알고리즘은 저주파수가 없는 인공합성자료와 실제 현장자료에 대해서 좋은 초기속도모델과 중간 단계의 속도모델을 제공하였다. 하지만 라플라스 파형역산은 잡음에 매우 민감한 알고리즘으로 신호의 첫 번째 이벤트 전의 잡음을 제거해주어야 한다(Ha *et al.*, 2010). 또한 라플라스 와 라플라스-푸리에 영역에서 감쇠된 파동장을 사용하는 경우 주의 하여야 할 점이 있다. 감쇠된 파동장은 후기 신호와 멀리 떨어진 오프셋(Offset)에 기록된 신호들의 진폭이 원 신호보다 매우 작아 저서 파형역산에 기여도가 떨어지게 된다. 이런 문제를 보상하기 위해 라플라스-푸리에 영역 파형역산은 로그 목적 함수(logarithmic objective function)를 주로 사용한다(Shin & Min, 2006; Shin *et al.*, 2007; Bednar *et al.*, 2007; Pyun *et al.*, 2007; Shin *et al.*, 2010; Jun *et al.*, 2014). 로그 목적함수를 포함하여 목적함수를 4가지 종류를

OBS(Ocean Bottom Seismic)자료에 실제 적용한 사례에서는 단순한 l_2 -norm 목적함수의 위상 자료만 사용해도 충분하다는 실험 결과도 존재한다(Kamei *et al.*, 2014). 현재 라플라스-푸리에 파형역산은 실제 현장자료에 사용될 만큼 그 활용도도 매우 높다. Kamei *et al.*(2013)은 특히 낮은 주파수와 큰 라플라스 감쇠 상수의 사용으로 파형역산의 비선형성을 최소화시킴으로써 모델의 상부를 추정해 나갔고, 다양한 라플라스 감쇠 상수를 통해 시간자료의 후기 신호들을 조절하는 방식으로 응용하였다. 또한 시간-주파수 하이브리드(Time-frequency hybrid) 파형역산을 변형한 시간-라플라스-푸리에 하이브리드 파형역산을 통해 3차원 현장 자료에 대해서도 성공적으로 속도모델을 구축 하였다(Kim *et al.*, 2013). 이 외에도 탄성 매질과 해수 속도역산에 다양하게 응용되고 있다(Jun *et al.*, 2014; Cho *et al.*, 2016; Blacic *et al.*, 2016).

하지만 라플라스와 라플라스-푸리에 영역 파형역산이 동작하는 이유에 대하여 초기 연구자들은 많은 의구심을 품었다. 특히 라플라스와 라플라스-푸리에 변환된 파동장의 0주파수 혹은 저주파수 성분의 존재에 대하여 명시적으로 그 존재를 보여주지 못하여 많은 회의론을 불러 일으켰다(Shin and Cha, 2009; Virieux & Operto, 2009, Ha & Shin, 2012). 이후 Ha *et al.*,(2010)과 Pyun *et al.*,(2011)의 연구에서 인공 합성 자료에 대한 라플라스 파형역산을 통해 간접적으로 라플라스 파형 역산의 결과를 설명하였다. 이 연구들은 라플라스 영역에서 계산된 자료의 잔차(residual)가 굉장히 부드럽다는 것을 확인하였고, 기존 주파수 영역에서 극 저주파수를 사용하여 계산된 잔차와 매우 유사 하다는 것을 확인하였다. 따라서 라플라스 혹은 라플라스-푸리에 영역에서 계산되는 그래디언트(gradient)는 이러한 장파장 성분의 잔차 때문에 주파수 영역보다 평활화한 그래디언트를 얻는다고 설명 하였다. 하지만 이러한 설명은 현장자료에 대한 경우 잡음과 탄성과 효과 때문에 항상 성립하지는 않는다(Bae *et al.*, 2010).

Ha & Shin (2012)은 감쇠된 파동장이 왜 0주파수 혹은 저주파수 성분이 존재하는지를 순환 합성곱(circular convolution)을 통해 감쇠된

파동장은 원 신호들의 서로 다른 가중치를 가진 주파수 성분들의 조합으로 라플라스-푸리에 변환된 자료가 저주파수 성분이 생성되는 이유라고 설명하였다. 또한 푸리에 급수(Fourier series)를 통해서도 라플라스-푸리에 변환된 자료가 저주파수 성분을 가지는 이유를 설명하였다. 이렇게 새롭게 생성된 저주파수 성질들을 바탕으로 라플라스 혹은 라플라스-푸리에 영역 파형역산이 크거나 중간 크기의 모델을 역산할 수 있는 이유로 설명하였다.

Ha & Shin (2013)은 또한 라플라스 파형역산이 왜 장파장 속도 모델을 생성하는지를 가상 송신원(virtual source)과 역 전파 파동장(back-propagated wavefield)을 사용하여 설명하였다. 그래디언트는 가상 송신원과 역 전파 파동장의 곱인데, 여기서 가상 송신원은 초기속도모델의 영향 때문에 정 전파 파동장과 편미분된 임피던스 행렬(impedance matrix)이 장파장 특징을 가진다는 것이다. 또한 라플라스 영역 파동장의 해석적해를 바탕으로 역 전파 파동장은 저파수 필터링(low wavenumber filtering) 역할을 한다고 설명하였다.

1.2 연구의 목적

복소주파수 사용을 통해 감쇠된 파동장을 사용하는 라플라스-푸리에 영역 파형역산은 초기속도모델이 충분히 좋지 못한 상태 혹은 자료에 저주파수 성분이 부족한 경우에서도 기존의 주파수 영역 파형역산보다 국소 최저치에 빠지지 않고 안정적으로 인공합성자료와 실제 현장 자료에 대해서도 좋은 속도모델을 구축한 사례들을 많이 볼 수 있었다. 하지만 아직까지 지구물리학계와 업계에서는 감쇠된 파동장 혹은 복소 주파수를 사용하는 라플라스-푸리에 영역(라플라스 영역도 포함) 파형역산 알고리즘의 우수성에 대한 의구심이 남아 있는 상태이다. 이는 라플라스-푸리에 영역 파형역산 알고리즘이 처음 제시된 이후 0주파수 혹은 저주파수 성분의 생성을 명확하게 수치적으로 증명한 연구 혹은 그 외의 기존 주파수 영역 파형역산과의 차이점을 밝혀내지 못하였기 때문이다. 지금까지의 라플라스-푸리에 영역에 대한 분석 연구들은 자료의 잔차, 역 전파 파동장, 가상 송신원 등 다양한 시각으로 0주파수 혹은 저주파수 생성을 그 이유로 설명하였지만, 앞선 연구들은 수치적으로 명확하게 그 근거를 제시하기에는 하기에는 부족한 연구결과이다. 따라서, 본 연구는 복소 주파수를 사용하는 라플라스-푸리에 영역 파형역산이 기존의 주파수 영역 파형역산보다 가지는 이점에 대하여 수치적이고 명확한 분석이 필요하다고 판단하였다. 이를 위해 우리는 기존의 분석과는 달리 새로운 접근법이 필요했고, 이를 위해 ‘모델 분해 행렬’과 ‘특이값 분해’를 활용하여 두 가지 영역에서의 파형역산 성능 분석을 진행하였다.

모델 분해 행렬은 추정된 모델과 실제 모델사이의 일종의 필터(filter)개념으로 추정된 모델이 얼마나 실제 모델에 가깝게 추정되었는지 판단하는 방법으로 사용된다(Tarantola 2005; Menke 2012). 모델의 해상도(resolution)을 측정하기 위하여 일반적으로는 분해 행렬의 대각성분을 조사하거나 인공합성자료 역산을 통한 결과 분석(e.g. 바둑판 모델 실험)을 수행한다. Martinez & McMechan(1991)

은 점탄성의(viscoelastic) 매질에서 간단한 모델에 대하여 속도, 밀도, q -값을 선형화된 역산을 진행 하였고, 모델 분해 행렬 계산또한 수행하였다. 분해 행렬은 선형 문제에 사용되는 기술(고정된 송신원 위치와 파선 경로를 가지는 경우)로 비선형 문제인 파형역산문제에서는 근사화된 결과를 분석한다고 볼 수 있다(Tryggvason *et al.*, 2002). 실제로 모든 물리적 시스템은 본질적으로 비선형문제이다. 하지만 선형 미분 방정식과 같이 선형 모델을 사용하여 실제 시스템의 동작을 설명하는 것이 가능하다(물리적 시스템이 공칭(nominal)^① 작동 조건에서 많이 벗어나지 않는 경우). 따라서 선형화된 시스템의 분석은 시스템 이론에서 중요한 위치를 차지한다(Vidyasagar, 2002). Zhang *et al.*(2007)은 비선형 지진파 토모그래피 문제에서 선형화된 역산을 사용하여 마지막 반복 횟수 단계에서 모델 분해 행렬을 계산하여 분석하였다. 비선형 문제에 대한 선형 측정을 한 것이지만, 여전히 그 가치가 충분하다고 기술하였다. Xia *et al.*(2008)은 자료 분해 행렬을 통해 파형역산에 사용되는 자료를 선정하였고, 모델 분해 행렬을 통해 표면파(surface-wave)를 포함한 자료를 사용하는 것이 좋은 모델 분해 행렬을 구성하였고 더 정확한 모델을 구축한다고 하였다. 특이값 분해는 최소 제곱해(least-square solution)를 구하고 시스템을 분석하는데 사용된 강력한 도구로 지구 물리학 학문 외에도 많은 분야에서 사용되고 있는 행렬 분해법이다. 지구물리 분야에서는 특이값 분해를 사용하여 해상 자료에 대한 음향, 탄성 방정식의 매개변수의 민감도 분석, 다양한 오프셋에 따른 자료의 진폭관계 분석, 탄성과 파형역산에 사용되는 여러 모델변수들의 매개변수화(parameterization) 분석 등 다양한 방면으로 사용되었다 (Assous & Collino, 1990; De Nicola *et al.*, 1993; Silvestrov & Tcheverda, 2011). Plessix & Cao(2011)은 헤시안 행렬(Hessian matrix)을 특이값 분해와 유사한 고유값 분해를 통해 어떻게 모델들을 매개변수화 하는 것이 적당한지를 분석하였다. Silvestrov *et al.*(2013)은 특히 주파수 영역 파형역산에서 주파수 마다 형성되는 자코비안 행렬 (Jacobian matrix) (혹은 forward operator)의 특이값 분해를 통해 각 주파수마다 얼마나 특이값들을 사용해야 안정적으로 파형역산을 할 수 있는지를 분석하였다.

① 실제 값과 동일하지는 않지만 근접한 명목상의 값을 말한다.

1.3 연구의 구성

제 2장에서는 우선 과형역산의 이론에 대하여 간략하게 설명한다. 우리는 과형역산의 알고리즘을 설명하기에 앞서 많은 학계에서 다루는 기본적인 선형문제에 대한 종류와 그 해법에 대하여 설명한다. 이후 본 연구에서 사용되는 주파수 영역과 라플라스-푸리에 영역에서의 선형화된 과형역산을 소개하고 또한 각 영역의 역산 문제에 사용되는 목적함수에 대하여 설명한다. 제 3장에서는 모델 분해 행렬과 특이 값 분해에 대한 정의와 본 연구에서의 활용 방안을 제시한다. 제 4장에서는 근사화된 라플라스-푸리에 영역과 주파수 영역의 해석적 해를 기반으로 주파수 및 라플라스-푸리에 영역에서의 모델 분해 행렬을 계산하여 그 결과를 분석하고 비교한다. 그리고 깊이가 깊어질수록 속도가 증가하는 속도모델과 속도모델 내부에 암염동이 위치하여 속도의 차이가 급격하게 발생하는 두 가지의 인공합성자료에 대하여 1차원 과형역산을 진행하여 각 영역의 자코비안 행렬의 특이값을 분석한다. 자코비안 행렬 계산은 다양한 초기속도모델과 다양한 라플라스 감쇠 상수를 조합하여 진행하였다. 이어서 간단한 2차원 모델에 대하여도 두 영역간의 자코비안 행렬을 구성하여 특이값 분해를 진행하여 비교 및 분석하였다. 마지막으로 분석된 결과들을 바탕으로 2차원 BP 인공 합성 자료를 통하여 주파수 영역과 라플라스-푸리에 영역에서의 역산 수치 실험 결과를 제시 한다. 끝으로 제 5장에서는 본 연구의 결론을 기술한다.

제 2 장 파형역산 이론

파형역산 이론을 설명하기에 앞서 기본적인 선형 시스템에서의 역산문제의 수치적 해법에 대한 설명을 한다. 역산 문제가 가지고 있는 기본적인 문제와 여러 상황에 따른 해법을 설명한다. 이어서 라플라스-푸리에 영역과 주파수 영역에서의 파형역산 알고리즘과 목적함수를 설명한다. 본 연구는 해석적으로 각 영역의 파형역산 성능을 비교 및 분석하기 위한 연구로 일반적으로 사용되는 파형역산의 다양한 기법들은 제시하지 않는다.

2.1 역산문제의 수치적 해법

과형역산의 알고리즘을 설명하기에 앞서서 본 연구주제와 밀접한 관련이 있는 역산문제에 대하여 먼저 간략한 설명을 한다. 역산문제의 목표는 측정값으로부터 원하는 모델을 재구성하는 것이다. 하지만 일반적으로 재구성된 혹은 추정된 모델이 실제 모델과는 다를 수 밖에 없다. 첫 번째 이유로, 취득된 측정값에 대한 모델의 해가 유일하지 않다는 점이다(non-uniqueness). 두 번째 이유로, 실제 자료는 언제나 오차를 포함하고 있기 때문에 추정되는 모델은 항상 이러한 오차로 오염되기 때문이다. 또한 풀고자 하는 역산 문제가 선형적인 경우여야 그 해를 정확하게 찾을 수 있는데 실존하는 역산 문제들의 대부분은 선형적이지 않다. 따라서 역산 문제는 대부분 안정적인 근사화를 통하여 선형화시킨 후 그 문제를 해결하는게 일반적이다. 특히 과형역산문제의 경우는 본 근사화(Born approximation)을 주로 사용 한다.

선형 역산문제는 자료 벡터를 나타내는 \mathbf{d} 와 모델 벡터를 나타내는 \mathbf{m} 과 자료와 모델 사이의 자료 변환을 하는 행렬 \mathbf{A} 를 통해 다음과 같은 식으로 나타낼 수 있다.

$$\mathbf{d} = \mathbf{A}\mathbf{m} + \mathbf{e} \quad (2.1. 1)$$

위 식에서 \mathbf{e} 는 기록된 자료가 오류 혹은 잡음에 감염된 것을 뜻한다. 기록된 자료를 통해서 추정된 모델을 계산하게 된다. 추정된 모델은 $\hat{\mathbf{m}}$ 으로 표시하겠다. 관측된 자료로부터 추정된 모델을 계산하기 위하여 많은 역산 연산자들이 개발되었다 (Menke, 1984; Tarantola, 1987; Parker, 1994). 하지만 가장 보편적으로 모델을 추정하는데 사용되는 방정식은 다음과 같다.

$$\tilde{\mathbf{m}} = \mathbf{A}^{-g} \mathbf{d} \quad (2.1. 2)$$

여기서 연산자 \mathbf{A}^{-g} 는 행렬 \mathbf{A} 의 일반화된 역산(generalized inverse)이라고 한다. 일반적으로 자료의 개수와 모델 매개변수의 개수는 다르게 구성되고, 이러한 이유로 행렬 \mathbf{A} 는 비-정사각 행렬(non-square matrix)로 구성되게 된다. 그리고 이러한 비-정사각 행렬은 그 역행렬이 존재하지 않는다. 추정된 모델 매개변수와 실제 모델 매개변수와의 관계는 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$\tilde{\mathbf{m}} = \mathbf{A}^{-g} \mathbf{A} \mathbf{m} + \mathbf{A}^{-g} \mathbf{e} \quad (2.1. 3)$$

여기서 행렬 $\mathbf{A}^{-g} \mathbf{A}$ 는 분해 커널(resolution kernel)이라고 하며 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$\mathbf{R} \equiv \mathbf{A}^{-g} \mathbf{A} \quad (2.1. 4)$$

식 (2.1. 3)을 해석하기 위해 다음과 같이 새롭게 쓸 수 있다.

$$\tilde{\mathbf{m}} = \mathbf{m} + (\mathbf{A}^{-g} \mathbf{A} - \mathbf{I}) \mathbf{m} + \mathbf{A}^{-g} \mathbf{e} \quad (2.1. 5)$$

이상적인 경우에는 추정된 모델 벡터와 실제 모델 벡터는 동일한 값을 가지게 된다 ($\tilde{\mathbf{m}} = \mathbf{m}$). 이 뜻은 우리가 선택한 모델 매개변수가 서로 독립적으로 추정되었다는 것을 의미한다. 식 (2.1. 5) 에 나머지 두 개의 식은 각각 추정된 모델에 대한 번짐(blurring)과 아티팩트(artifacts)를 뜻한다. $(\mathbf{A}^{-g} \mathbf{A} - \mathbf{I}) \mathbf{m}$ 은 추정된 모델 벡터의 성분이 실제 모델 벡터의 상이한 성분의 선형 조합이라는 것을 보여주고 있다. 이와 관련되어서 분해 행렬에 대한 설명과 함께 3.1절에서 자세하게 다루도록 하겠다.

역산문제는 크게 3가지 경우의 문제가 존재 한다. 첫 번째 문제로 독립적인 취득 자료의 개수가 우리가 추정해야 하는 모델의 개수보다 많은 경우, 이를 우리는 과도하게 결정된 문제 (over-determined problems)라고 한다. 이러한 경우 추정된 모델 벡터의 해는 다음과 같다.

$$\tilde{\mathbf{m}} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{d} \quad (2.1. 6)$$

취득 자료(\mathbf{d})와 새롭게 계산된 자료($\mathbf{A}\tilde{\mathbf{m}}$)의 차이를 를 사용하여 최소 제곱 해(least-squares solution)를 구하게 된다. 식 (2.1. 6)의 T 는 전치(transpose)행렬 연산을 뜻한다.

다음은 첫 번째 문제와는 반대의 경우로 취득 자료의 개수가 우리가 추정해야 하는 모델의 개수보다 적은 경우, 이를 우리는 부정 문제(underdetermined problems)라고 한다. 이러한 어떤 방정식이 부정 시스템(underdetermined system)을 가지는 경우 추정된 모델 벡터의 해는 다음과 같이 최소 노름 해(minimum norm solution)를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\tilde{\mathbf{m}} = \mathbf{A}^T (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{d} \quad (2.1. 7)$$

마지막으로 가장 보편적인 경우가 남아있다. 이는 앞서 언급한 두 가지의 경우가 모두 해당되는 경우로 혼합 결정 문제(mixed-determined problems)이다. 이 경우, 어떠한 모델 벡터에 대해서는 많은 자료가 존재하지만 반대로 다른 어떠한 모델 벡터에 대해서는 자료가 부족한 상황이 공존하는 경우로 불량조건 문제(ill-posed problems)인 경우이다. 또한 역행렬이 존재한다 하더라도 나쁜 조건의 문제 (ill-conditioned problems)를 가지고 있는 경우가 대부분이다. 나쁜 조건의 문제는 자료 벡터의 작은 변화가 모델 매개변수 추정에 예상치 못한 큰 변화를 가져오는 경우는 뜻한다. 자료의

오류(errors)는 모델을 추정하는데 있어서 크게 영향을 줄 수 있다. 이러한 문제를 해결하기 위하여 자료의 작은 변화에도 크게 민감하지 않은 트릭(trick)이 필요하다. 이를 위해 1944년 Levenberg는 감쇠된 최소 제곱 해 (damped least-squares solution)를 제안하였고 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$\tilde{\mathbf{m}} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A} + \gamma^2 \mathbf{I})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{d} \quad (2.1. 8)$$

식 (2.1. 8)은 행렬 $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ 의 모든 고유값(eigenvalues)에 추가로 γ^2 값을 더해주는 역할을 하게 된다. 식(2.1. 8)은 다음과 같은 비용 함수(cost function)를 최소화 하는 해라고 표현할 수 있다.

$$S = \|\mathbf{d} - \mathbf{A}\mathbf{m}\|^2 + \|\gamma\mathbf{m}\|^2 \quad (2.1. 9)$$

식 (2.1. 9)의 우변의 첫 번째 항을 최소화 시키는 것은 자료에 가장 잘 맞는 모델을 찾는 데 도움이 될 것이다. 식 (2.1. 9)의 마지막 항을 최소화하는 것은 가장 작은 노름(norm)을 가진 모델을 찾는 것에 해당된다. 일반적으로 우리는 두 항을 모두 동시에 최소화 시킬 수 는 없다. 하지만 식 (2.1. 9)을 최소화 시킴으로써 합리적으로 자료에 적합하고 모델의 크기가 너무 커지지 않는 방향으로 해를 구할 수 있다. γ 은 균형변수(trade-off)로, 이 값을 조절함으로써 계산 결과는 달라 질 수 있다. 또한 이 방법은 정규화(regularization) 과정과 동일하다.

2.2 주파수 및 라플라스-푸리에 파형역산 알고리즘

파형역산 알고리즘은 실제 취득한 탄성과 혹은 음향파 자료와 파동 방정식을 기반으로 얻어진 수치 실험 자료와의 차이를 줄여나가는 방향으로 목적함수(Objective function)을 설정하여 그 값을 최소화 하는 방향으로 지하 물성치(P파 속도, S파 속도, 밀도, 이방성 계수 등)를 추정하는 알고리즘이다.

파형역산 알고리즘을 설명하기 앞서, 주파수 및 라플라스-푸리에 영역에서의 파동 방정식을 간략하게 설명한다. 주파수 및 라플라스-푸리에 영역에서의 파동 방정식을 표현하기 위하여 일반적인 라플라스 변환(Laplace transform)을 사용하여 등방성 매질(isotropic media)에서의 음향 파동 방정식을 표현하면 다음과 같다.

$$\frac{s^2}{c(\mathbf{x})^2} u(\mathbf{x}|\mathbf{s}, s) - \nabla^2 u(\mathbf{x}|\mathbf{s}, s) = f(s)\delta(\mathbf{x} - \mathbf{s}) \quad (2.2. 1)$$

여기서 $c(\mathbf{x})$ 는 \mathbf{x} 위치에서의 P파 속도 함수이고, $u(\mathbf{x}|\mathbf{s}, s)$ 는 송신원(\mathbf{s})위치에서 전파되어 \mathbf{x} 위치에서 관측된 다음과 같은 일반적인 라플라스 변환된 파동장 이고 $f(s)$ 는 라플라스 변환된 송신원 함수 이다.

$$u(\mathbf{x}|\mathbf{s}, s) = \int_0^{T_{max}} \tilde{u}(\mathbf{x}|\mathbf{s}, t) e^{-st} dt \quad (2.2. 2)$$

식 (2.2. 2)은 라플라스-푸리에 영역에서의 파동장을 뜻한다. T_{max} 는 기록된 신호의 최대 기록 시간이며 $\tilde{u}(t)$ 는 시간 영역에서의 파동장을 나타낸다. 일반적인 라플라스 변환에 사용되는 s 는 복소 주파수(complex frequency)로써 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$s = \sigma + i\omega \quad (2.2. 3)$$

s 는 라플라스 감쇠 상수(Laplace damping constant) 이며 ω 는 주파수(frequency)를 뜻한다. 주파수 영역의 파동 방정식의 경우 복소 주파수 내에 σ 값이 0인 경우, 즉 단순한 푸리에 변환(Fourier transform)형태가 되고 라플라스-푸리에 영역의 파동 방정식의 경우는 σ 와 ω 를 모두 사용하는 경우이다.

식 (2.2. 1)은 유한 차분법(Finite difference method) 또는 유한 요소법 (Finite element method)을 사용하여 이산화 하여 모델링 할 수 있다. 또한 식 (2.2. 1)은 행렬과 벡터의 형태로 간단하게 나타내면 다음과 같다.

$$\mathbf{S}\mathbf{u} = \mathbf{f} \quad (2.2. 4)$$

\mathbf{S} 는 복소 임피던스 행렬(complex impedance matrix), \mathbf{u} 는 변환된 파동장 그리고 \mathbf{f} 는 변환된 송신원 벡터 이다.

파형역산에 사용되는 목적함수는 일반적으로 $l_2 - \text{norm}$ 을 사용한다. 반면, 라플라스-푸리에 영역 파형역산의 경우 감쇠된 파동장이 오프셋(Offset)이 증가함에 따라 파동장의 진폭 (Amplitude) 이 지수적으로 감소하기 때문에 작은 값에도 충분히 그 값을 감지 할 수 있는 목적함수를 사용할 필요가 있다. 로그 목적함수 (Logarithmic objective function)은 이처럼 작은 변화도 민감하게 감지해 낼 수 있는 목적 함수로써 라플라스-푸리에 파형 역산에 적합한 목적함수이다. 각 목적함수에서의 단일 송신원과 단일 수신기에 대한 자료의 잔차(residual)는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\Delta\psi_f = \mathbf{u}(\omega) - \mathbf{d}(\omega)$$

$$\Delta\psi_{lf} = \ln(\mathbf{u}(s)) - \ln(\mathbf{d}(s)) = \ln\left(\frac{\mathbf{u}(s)}{\mathbf{d}(s)}\right) \quad (2.2. 5)$$

여기서 $\Delta\psi_f$ 는 주파수 영역에서 $l_2 - \text{norm}$ 을 사용하는 경우의 자료의 잔차이고, $\Delta\psi_{lf}$ 는 라플라스-푸리에 영역에서 로그 목적함수를 사용하는 경우의 자료의 잔차이다. $\mathbf{u}(\omega)$ 은 주파수 영역에서 정 전파 모델링을 통해 얻은 수치 파동장이고 $\mathbf{d}(\omega)$ 은 푸리에 변환된 관측 파동장이다. $\mathbf{u}(s)$ 은 라플라스-푸리에 영역에서 정 전파 모델링을 통해 얻은 수치 파동장이고 $\mathbf{d}(s)$ 은 라플라스-푸리에 변환된 관측 파동장이다.

다음은 단일 송신원에 대하여 단일 주파수에 대한 $l_2 - \text{norm}$ 목적함수 ($E_f(\mathbf{m})$)와 단일 복소 주파수에 대한 로그 목적함수 ($E_{lf}(\mathbf{m})$)이다.

$$E_f(\mathbf{m}) = \frac{1}{2} \Delta\psi_f^H \Delta\psi_f = \frac{1}{2} [\mathbf{u}(\omega) - \mathbf{d}(\omega)]^H (\mathbf{u}(\omega) - \mathbf{d}(\omega)) \quad (2.2. 6)$$

$$E_{lf}(\mathbf{m}) = \frac{1}{2} \Delta\psi_{lf}^H \Delta\psi_{lf} = \frac{1}{2} \left[\ln\left(\frac{\mathbf{u}(s)}{\mathbf{d}(s)}\right) \right]^H \ln\left(\frac{\mathbf{u}(s)}{\mathbf{d}(s)}\right) \quad (2.2. 7)$$

여기서 \mathbf{m} 은 모델 매개변수 혹은 구하고자 하는 지하 물성치 벡터이다. H 는 켤레 복소수 전치 행렬(complex conjugate transpose) 연산을 뜻한다.

우리가 다루는 파형역산 문제는 앞선 2.1절에서 설명하였듯 비선형 문제 이고 또한 불량조건 문제(ill-posed problems)와 나쁜 조건의 문제(ill-conditioned problems)를 포함하고 있다. 그렇기 때문에 적절한 근사화와 반복적 최적화(Optimization)를 적용하여 파형

역산문제를 계산한다. 대부분의 파형 역산 문제는 선형화를 위하여 본 근사화(Born approximation)을 사용하여, 모델 업데이트 ($\Delta \mathbf{m}$)와 변환된 관측자료와 정 전과 모델링된 자료와의 잔차($\Delta \psi$)를 다음과 같은 관계식으로 정리할 수 있다.

$$\mathbf{J}\Delta \mathbf{m} = \Delta \psi \quad (2.2. 8)$$

식 (2.2. 8)의 \mathbf{J} 는 자코비안 행렬(Jacobian matrix)또는 편미분 파동장을 뜻한다. 자코비안 행렬은 다음과 같이 정의된다.

$$J_{ij} = \frac{\partial u_i(s)}{\partial m_j} \quad (2.2. 9)$$

혼합 결정 문제(mixed-determined problem)를 해결하기 위하여 식 (2.2. 8)을 가우스-뉴턴법(Gauss-Newton method)으로 재 구성하면 다음과 같다.

$$(\mathbf{J}^H \mathbf{J} + \lambda^2 \mathbf{I})\Delta \mathbf{m} = \mathbf{J}^H \Delta \psi$$

$$\Delta \mathbf{m} = \Re\{\mathbf{J}^H \mathbf{J} + \lambda^2 \mathbf{I}\}^{-1} \Re\{\mathbf{J}^H \Delta \psi\} = \Re\{\mathbf{J}^H \mathbf{J} + \lambda^2 \mathbf{I}\}^{-1} \nabla_{\mathbf{m}} E$$

$$\Delta \mathbf{m} = \Re\{\mathbf{H}_a + \lambda^2 \mathbf{I}\}^{-1} \nabla_{\mathbf{m}} E \quad (2.2. 10)$$

여기서 λ 는 감쇠 상수 혹은 정규화 상수를 뜻하고 \mathbf{I} 는 단위행렬 을 뜻한다. 식 (2.2. 10)의 첫 번째 식 우변 항은 정의된 목적함수의 값을 최소화 시키기 모델 변수 \mathbf{m} 에 대한 목적함수의 그래디언트(Gradient)로 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$\nabla_m E = \Re\{J^H \Delta\psi\} \quad (2.2. 11)$$

여기서 \Re 은 실수 부를 의미한다. 그래디언트를 계산하기 위해 서는 자코비안 행렬의 계산이 반드시 필요하지는 않으며, adjoint-state 법을 통해 직접 편미분 파동장을 계산하지 않고 효율적으로 계산될 수 있다. 식 (2.2. 10)의 두 번째 식의 $J^H J$ 는 다음과 같이 근사화된 헤시안 행렬(Approximated Hessian matrix)로 정의된다.

$$J^H J = H_a \quad (2.2. 12)$$

헤시안 행렬도 실제 자코비안 행렬을 구하여 계산할 수 있지만, 그 계산 비용이 방대하기 때문에 여러 연구자들은 간접적으로 헤시안 행렬을 계산하는 알고리즘들을 많이 제시하였다. 대표적으로 근사화된 헤시안 행렬을 근사화하여 가상송신원의 대각 성분만을 사용하는 유사 헤시안 (pseudo-Hessian) (Shin *et al.* 2001), truncated Gauss-Newton(golub and van Loan 1996), L-BFGS (Limited-memory Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno) 등 다양한 방법들로 헤시안 행렬을 간접적으로 계산 할 수 있다.

앞서 2.1장에서 소개하였듯, 파형역산의 나쁜 조건의 문제(ill-conditioned problems)를 줄이기 위하여 헤시안 행렬의 대각성분에 λ^2 를 더하는 정규화 과정을 포함하였다. 실제로 헤시안 행렬을 계산해보면 매우 작은 값들이 존재하게 되는데 이는 헤시안 행렬의 역행렬을 계산하는데 있어서 매우 불안정한 원인을 제공하게 된다. 따라서 정규화 과정은 이러한 역행렬 계산의 불안정성을 안정 시키는데 매우 효과적이다. 식 (2.2. 10)에서 계산된 모델 업데이트($\Delta \mathbf{m}$)는 식 (2.2. 8)의 감쇠된 최소 제곱 해 (damped least squares solution)임을 확인할 수 있다. 파형역산문제를 본 근사를 통하여 선형화 하였지만, 기본적으로 비선형문제이기 때문에 식 (2.2. 10)에서 얻어진 모델 업데이트($\Delta \mathbf{m}$)는 한 번에 목적함수를 전역

최소값(Global minimum)에 수렴 할 수 있는 값을 계산할 수 없다.
따라서 다음과 같이 반복적으로 그 해를 계산하여야 한다.

$$\mathbf{m}^{k+1} = \mathbf{m}^k + \Delta \mathbf{m} \quad (2.2. 13)$$

\mathbf{m}^{k+1} 은 $k+1$ 번째의 모델 매개변수 이고, k 번째 반복회수에서의 초기 모델 매개변수(\mathbf{m}^k)와 계산된 모델 업데이트($\Delta \mathbf{m}$)를 통하여 갱신된다.

제 3 장 모델 분해 행렬과 특이값 분해

모델 분해 행렬은 추정된 모델값이 실제 모델값과 얼마나 그 값이 유사하게 추정되었는지 판단하는 척도로 사용되고 있다 (Tarantola, 2005; Menke, 2012; Tryggvason *et al.*, 2002; Zhang *et al.*, 2007; Xia *et al.*, 2008). 본 연구에서는 기본적으로 복소 주파수를 사용하는 라플라스-푸리에 영역과 기존의 주파수 영역 파형역산의 성능을 수치적으로 분석하기 위하여 각 영역의 모델 분해 행렬을 계산한다. 각 영역의 모델 분해 행렬 계산을 위하여 파동경로(wave-path)의 개념을 우선 설명한다. 파동경로는 자코비안 해열(Jacobian matrix), 데이터 커널 (data kernel), 편미분 파동장(partial derivative wavefield) 등 다양한 용어로 불릴 수 있다. 파동경로는 라플라스-푸리에 영역과 주파수 영역에서 다르게 정의될 수 있는데 이는 각 영역마다 목적함수(objective function)가 다르게 정의되기 때문이다.

특이값 분해(Singular value decomposition)는 정사각 행렬이 아닌 행렬도 고유값 분해(eigenvalue decomposition)를 하는 기술로 1961년 Lanczos에 의해 제안되었다. 특이값 분해는 어떤 시스템의 성능을 분석하는데 사용되는 기술로, 본 연구에서는 자코비안 행렬(Jacobian matrix)을 분석하는데 적용하였다. 선형화된 파형역산문제는 자료 영역, 모델 영역, 그리고 자코비안 행렬과의 관계식으로 볼 수 있으며, 자코비안 행렬의 특이값 분해를 통한 각 영역에서의 특이값을 분석한다면, 어떤 영역의 파형역산 시스템이 더 안정적이고 우수 한지를 판단할 수 있다.

3.1 모델 분해 행렬

파동경로(wave-path)와 그린함수(Green's function)

파동 경로를 정의하기에 앞서서 일반적인 라플라스 변환된 파동 방정식 식 (2.2. 1)을 사용하여 그린함수(Green's function)을 먼저 정의한다. 그린함수는 어떠한 시스템에서의 임펄스 응답(impulse response)으로 주파수 영역과 라플라스-푸리에 영역에서 송신원의 크기가 1이고 위상이 0인 신호에 대한 파동장을 뜻한다.

$$G(\mathbf{x}|\mathbf{s}) = \left(\frac{s^2}{c(\mathbf{x})^2} - \nabla^2 \right)^{-1} \delta(\mathbf{x}' - \mathbf{s}) \quad (3.1. 1)$$

여기서 $G(\mathbf{x}|\mathbf{s})$ 는 송신원 지점(\mathbf{s})에서 전파되어 산란지점 (scattering media)(\mathbf{x})로 도달한 그린함수이다.

본 근사화를 사용하여 배경 속도(c_0) 에서 얻은 그린함수(G_0)로 l_2 -norm 목적함수를 사용할 경우 다음과 같이 주파수 영역의 파동경로는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$J(\mathbf{x}|\mathbf{s}) = -\omega^2 G_0(\mathbf{x}|\mathbf{r}) G_0(\mathbf{x}|\mathbf{s}) \quad (3.1. 2)$$

하지만, 라플라스-푸리에 영역의 경우, 식 (2.2. 7)과 같이 로그 목적함수를 사용하기 때문에 주파수 영역과는 다른 잔차(residual)을 형성하게 된다. 그렇기 때문에 l_2 -norm 목적함수를 사용하는 기존 주파수 영역과는 다른 파동경로를 가지게 되고 이를 Rytov 파동 경로라고 하며 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$J(\mathbf{x}|\mathbf{s}) = s^2 \frac{G_0(\mathbf{x}|\mathbf{r})G_0(\mathbf{x}|\mathbf{s})}{G_0(\mathbf{r}|\mathbf{s})} \quad (3.1. 3)$$

$\mathbf{s}, \mathbf{r}, \mathbf{x}$ 는 각각 송신원, 수신기, 산란매질의 위치 벡터(position vector)이다. 로그 목적함수의 파동경로는 l_2 -norm 목적함수의 파동경로와 달리 송신원과 수신기 사이에 그린함수를 나누어주게 된다. 본 연구에서 송신원, 수신기, 산란매질 사이의 위치 벡터와 방향 벡터(direction vector)는 그림 1에 도시되어 있다. 앞서 정의된 파동경로는 연구자에 따라 편미분 파동장, 자코비안 행렬, 데이터 커널등 다르게 표기되기도 한다.

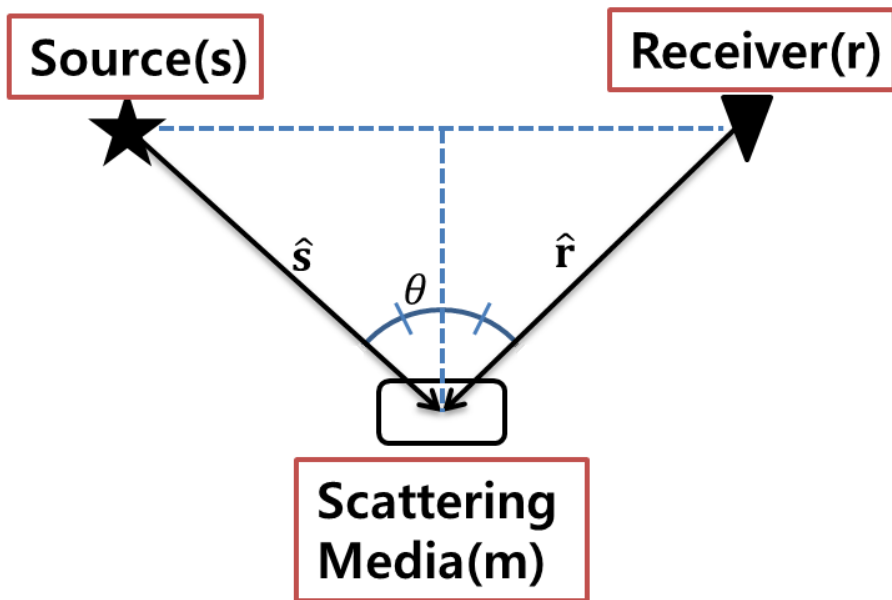


그림 1. 송신원(source), 수신기(receiver), 산란매질(scattering media) 사이의 위치 관계와 방향벡터의 모식도

모델 분해 행렬(model resolution matrix)의 정의

선형 역산문제는 모델 매개변수(\mathbf{m})와 자료(\mathbf{d}), 그리고 모델과 데이터 사이의 관계를 이어주는 데이터 커널(\mathbf{G})(data kernel)로 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\mathbf{G}\mathbf{m} = \mathbf{d} \quad (3.1. 4)$$

여기서 \mathbf{G} 는 모델 매개변수를 자료의 형태로 연결시켜주는 역할을 한다. 일반화된 역산(\mathbf{G}^{-g})는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\mathbf{m} = \mathbf{G}^{-g}\mathbf{d} \quad (3.1. 5)$$

모델 분해 행렬(model resolution matrix)은 다음과 같은 관계식을 통해 정의 할 수 있다.

$$\mathbf{d}^{\text{obs}} = \mathbf{G}\mathbf{m}^{\text{true}} \quad (3.1. 6)$$

$$\mathbf{m}^{\text{est}} = \mathbf{G}^{-g}\mathbf{d}^{\text{obs}} \quad (3.1. 7)$$

식 (3.1. 6)을 통해 실제 모델에서 자료(\mathbf{d}^{obs})를 얻을 수 있으며, 식 (3.1. 7)을 통해 얻어진 자료에서부터 모델을 추정할 수 있게 된다. 이때 식 (3.1. 6)을 식 (3.1. 7)에 대입하여 정리하면 다음과 같은 관계식을 얻을 수 있다.

$$\mathbf{m}^{\text{est}} = \mathbf{G}^{-g}\mathbf{G}\mathbf{m}^{\text{true}} = \mathbf{R}\mathbf{m}^{\text{true}} \quad (3.1. 8)$$

위 식의 \mathbf{R} 이 분해 행렬이다(Wiggins 1972). 분해 행렬은 추정된 모델 매개변수가 분해 행렬이 단위 행렬($\mathbf{R} = \mathbf{I}$)인 특별한 경우에만 실제 모델 매개변수와 동일하다는 것을 알 수 있다. 일반적인 경우, 추정된 모델 매개변수는 실제 모델 매개변수의 선형조합 혹은 가중 평균으로 나타낼 수 있다. 아래는 추정된 모델, 실제 모델 그리고 분해 행렬 사이의 관계를 그림으로 나타낸 것이다.

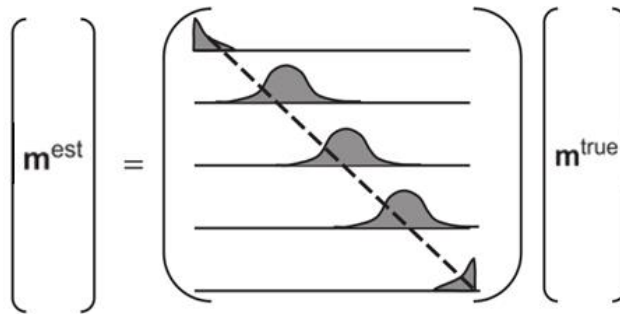


그림 2. 모델 분해 행렬 (Menke의 2012, Geophysical Data Analysis의 그림을 인용 및 수정함)

이처럼 모델 분해 행렬이 단위 행렬에 가까울수록 해당 시스템의 추정된 모델 매개변수가 실제 모델 매개변수에 가깝게 역산이 될 수 있다는 것을 의미한다.

모델 분해 행렬을 통한 파형역산 분석

라플라스-푸리에 영역 파형역산과 주파수 영역 파형역산 시스템의 모델 분해 행렬을 계산하기 위해서 우리는 그린함수의 해석적 해(analytic solution)를 사용하기로 한다. 앞선 2.1장에서 설명하였듯, 우리가 다루게 되는 파형역산 시스템은 혼합 결정 문제(mixed-determined problems)이기 때문에 감쇠된 최소 제곱 해를 사용하여야 한다. 식 (2.2. 10)를 여러 개의 라플라스 감쇠 상수에 대한 추정된 모델 업데이트 ($\Delta \mathbf{m}^{est}$)를 전개 하면 다음과 같다. 라플라스-푸리에 영역에서 주파수 영역으로의 변환은 복소 주파수의 실수부분을 0으로 두고 전개하면 간단하게 계산할 수 있다.

$$\Delta \mathbf{m}^{est} = \left[\sum_s W_s(s) (\mathbf{J}^H \mathbf{J} + \lambda^2 \mathbf{I}) \right]^{-1} \sum_s W_s(s) \mathbf{J}^H \Delta \psi \quad (3.1. 9)$$

여기서 $W_s(s)$ 는 각 복소 주파수 ($s = \sigma + i\omega$)에 해당하는 가중 함수이다. 모델 분해 행렬을 계산하기에 앞서 우리는 3가지의 가정이 필요하다. 첫째로, 파동이 전파 함에 따라 진폭이 감쇠되는 효과(geometrical spreading effect)를 무시한다. 둘째, 배경 속도(c_0)는 일정하다. 마지막으로, 원거지장 파동(far-field wavefield)이라는 가정 때문에 그린함수가 평면파(plane-wave approximation)로 진행된다는 가정을 하겠다. 위와 같은 세 가지의 가정으로 그린 함수는 다음과 같이 근사화가 가능하다.

$$G_0(\mathbf{x}|\mathbf{s}) \approx A \exp(\alpha_0 \hat{\mathbf{s}} \cdot \mathbf{x})$$

$$G_0(\mathbf{r}|\mathbf{x}) \approx A \exp(-\alpha_0 \hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{x}) \quad (3.1. 10)$$

여기서 $\alpha_0 = s/c_0$ 는 배경속도가 c_0 인 공간에 대한 라플라스 상수

이며 라플라스 넘버(Laplace number)라고 한다. 주파수 영역에서의 그린함수인 경우 α_0 을 파수(wavenumber)($ik_0 = i\omega/c_0$)로 치환하여 정의할 수 있다. 앞서 정의한 파동경로를 바탕으로 그린함수를 사용하여 (3.1. 9)를 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$\Delta \mathbf{m}^{est}(\mathbf{x}) = \left[\sum_s W_s(s) s^4 \sum_{src,rcv} G_{src}^* G_{rcv}^* W_{src,rcv}^* W_{src,rcv} G_{rcv} G_{src} + \lambda^2 I \right]^{-1} \sum_s W_s(s) s^2 \sum_{src,rcv} G_{src}^* G_{rcv}^* W_{src,rcv}^* \Delta \psi \quad (3.1. 11)$$

여기서 G_{rcv} 와 G_{src} 는 각각 수신기와 송신원에서 전파된 그린함수이고 행렬이 아닌 송신원-수신기 쌍에 대한 그린함수 값을 의미하고 있다. $\Delta \mathbf{m}^{est}$ 는 추정된 모델 업데이트를 뜻하고, $W_{src,rcv}$ 는 송신원-수신기 쌍에 대한 가중함수이고, *는 켈레 복소수 연산자를 뜻한다.

식 (3.1. 11)을 모델 분해 행렬 형태로 전개하기 위해서는 잔차 부분을 본 근사화를 통한 라플라스 변환된 그린함수로 다음과 같이 실제 모델 업데이트($\Delta \mathbf{m}^{true}$)와 의 관계식을 정의 할 수 있다(Miller *et al.*, 1987).

$$\Delta \psi(\mathbf{r}, \mathbf{s}) \approx s^2 W_{src,rcv}(\mathbf{r}, \mathbf{s}) \int d\mathbf{x} G_0(\mathbf{r}|\mathbf{x}) G_0(\mathbf{x}|\mathbf{s}) \Delta \mathbf{m}^{true}(\mathbf{x}) \quad (3.1. 12)$$

식 (3.1. 12)의 의미를 살펴보면, 잔차가 공간에 대한 함수인 모델 차이를 $\alpha = \alpha_0(\hat{\mathbf{r}} - \hat{\mathbf{s}})$ 라는 라플라스 변환 커널을 사용하여 공간에 대한 라플라스 변환한 것을 알 수 있다. 공간에 대한 라플라스 변환된 모델 업데이트 혹은 차이($\Delta \tilde{\mathbf{M}}^{true}(\alpha)$)로 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\Delta\psi(\mathbf{r}, \mathbf{s}) \approx s^2 W_{src,rcv}(\mathbf{r}, \mathbf{s}) \Delta\tilde{\mathbf{M}}^{true}(\boldsymbol{\alpha}) \quad (3.1. 13)$$

최종적으로 식 (3.1. 11)을 다시 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \Delta\mathbf{m}^{est}(\mathbf{x}) &= \left[\sum_s W_s(s) s^4 \sum_{src,rcv} G_{src}^* G_{rcv}^* W_{src,rcv}^* W_{src,rcv} G_{rcv} G_{src} \right. \\ &\quad \left. + \lambda^2 I \right]^{-1} \sum_s W_s(s) s^2 \sum_{src,rcv} G_{src}^* G_{rcv}^* W_{src,rcv}^* s^2 W_{src,rcv} \Delta\tilde{\mathbf{M}}^{true}(\boldsymbol{\alpha}) \\ &= \left[\sum_s W_s(s) s^4 \sum_{src,rcv} \mathbf{H} + \lambda^2 I \right]^{-1} \sum_s W_s(s) s^4 \sum_{src,rcv} \mathbf{g} \end{aligned} \quad (3.1. 14)$$

여기서 \mathbf{H} 와 \mathbf{g} 는 각각 헤시안 행렬과 그라디언트로써 다음과 같이 간단한 지수함수 형태로 표현 할 수 있다.

$$\mathbf{H} \approx A^4 \exp(-\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{x}_i) \exp(-\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{x}_j)$$

$$\mathbf{g} \approx A^2 \exp(-\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{x}_i) \Delta\tilde{\mathbf{M}}^{true}(\boldsymbol{\alpha}) \quad (3.1. 15)$$

즉, 모델 분해 행렬은 감쇠 상수가 대각 성분에 추가된 헤시안 행렬의 역행렬과 헤시안 행렬의 곱으로 볼 수 있다. 또한 식 (3.1. 14)을 통해, 우리가 다루는 파형역산 시스템을 분석하기 위해서는 $\Delta\mathbf{m}^{est}(\mathbf{x})$ 과 $\Delta\mathbf{m}^{true}(\mathbf{x})$ 의 관계를 분석할 필요가 있다. 다시 말하면, $\Delta\tilde{\mathbf{M}}^{true}(\boldsymbol{\alpha})$ 는 $\Delta\mathbf{m}^{true}(\mathbf{x})$ 의 공간에 대한 라플라스 변환이므로 식 (3.1. 14)에서 $[\sum_s W_s(s) s^4 \sum_{src,rcv} \mathbf{H} + \lambda^2 I]^{-1} \sum_s W_s(s) s^4$ 은 $\Delta\tilde{\mathbf{M}}^{true}(\boldsymbol{\alpha})$ 를

$\Delta m^{est}(\mathbf{x})$ 로 공간에 대한 라플라스 역변환^②(inverse Laplace transform)과 같은 역할을 수행해야 함을 알 수 있다. 주파수 영역의 경우, 공간에 대한 푸리에 역변환으로 볼 수 있다.

정리하자면, 만약 우리가 다루는 파형역산 시스템이 0 주파수부터 특정 최대 주파수까지 모든 성분을 온전하게 사용할 수 있다면, 기존의 주파수 영역의 파형역산의 경우 자코비안 행렬을 구성하는 벡터가 모든 주파수 성분에 대하여 직교 기저(orthogonal basis)로 이루어진다. 즉, 모든 적분 구간에 대하여 직교 기저로 구성된 자코비안 행렬을 통해 헤시안 행렬을 계산하게 되면, 헤시안 행렬은 완전 계수(full-rank)인 행렬이 되고 그 역행렬 계산 또한 안정적으로 계산될 수 있다. 또한 이로 인하여 해당 시스템의 모델 분해 행렬은 단위행렬이 된다. 즉, 취득된 자료가 모든 주파수 성분을 온전하게 사용할 수 있는 이상적인 경우라면, 특별한 트릭 없이도 우리는 기존의 주파수 영역 파형역산을 통해 완벽하게 지하 물성치를 추정할 수 있다는 뜻이 된다.

하지만 우리가 다루는 실제 파형역산의 시스템은 저주파수 대역에서의 낮은 신호 대 잡음비와 송신원, 수신기에서 발생하는 고스트 효과(ghost effect) 때문에 발생하는 노치 주파수 (notch frequency) 때문에 사용할 수 있는 주파수 대역이 제한되게 된다. 또한 기타 예측하기 힘든 탐사환경의 가변적인 요인으로 취득된 자료는 모든 주파수 성분을 온전하게 사용할 수 없다. 이렇게 온전하게 주파수 대역을 사용하지 못하는 경우, 우리가 표현하고자 하는 공간에 대한 파수 성분이 부족하게 되고 기존의 주파수 영역의 헤시안 행렬은 그 행렬 계수(rank)가 낮아지게 된다. 비록 정규화를 통해 행렬 계수가 낮음에도 불구하고 헤시안 행렬의 역행렬을 계산할 수 는 있지만, 낮은 행렬 계수를 가진 헤시안 행렬로 구성된 모델 분해 행렬은 비-대각(off-diagonal) 성분에 0이 아닌 값이 존재하게 되고 이는 곧 해당 파형역산 시스템이 지하 물성치를 완벽하게 추정할 수 없다고 해석할 수 있다.

^② 실제로 공간에 대한 라플라스 역 변환은 존재하지 않는다. 하지만 방정식의 해석을 돕고자 도입한 개념임을 밝힌다.

3.2 특이값 분해

특이값 분해(Singular value decomposition, SVD)는 1961년 Lanczos에 의해 개발된 기술로, 행렬의 고유값 분해(eigenvalue decomposition, EVD)와 유사하게 행렬을 대각화 하는 방법이다. 특이값 분해는 고유값 분해와는 달리 통해 비-정방 행렬 형태를 이루는 실수 혹은 복소수 행렬에 대한 행렬의 고유 벡터 분해를 할 수 있다.

특이값 분해를 통해 크기가 $m \times n$ 인 행렬 R 은 다음과 같이 3개의 행렬로 분해할 수 있다.

$$R = U \Sigma V^H \quad (3.2. 1)$$

여기서 U 는 $m \times m$ 크기로 실수 행렬을 분해한 경우 직교행렬(orthogonal matrix)^③이고 복소수 행렬을 분해한 경우 복소 유니타리 행렬(complex unitary matrix)^④이다. 행렬 V 는 $n \times n$ 크기를 가지며 그 성질은 행렬 U 와 동일하다. 행렬 Σ 는 $m \times n$ 의 크기를 가지는 대각행렬이다. 그리고 H 는 켤레 복소수 전치 행렬 연산자를 뜻한다.

행렬 U 는 행렬 RR^H 의 고유값 분해를 통해 얻어지는 직교행렬 혹은 복소 유니타리 행렬로 행렬 R 의 left singular vector라고 부른다. 반면, 행렬 V 는 행렬 $R^H R$ 을 고유값 분해를 통해 얻어진 직교행렬 혹은 복소 유니타리 행렬로 right singular vector라고 부른다. 행렬 Σ 는 행렬 RR^H 혹은 $R^H R$ 를 고유값 분해를 통해 얻어지는 고유값(eigenvalue)들의 제곱근을 대각성분으로 가지는 행렬로 그 값들을 행렬 R 의 특이값(singular value)라고 부르며 이 값들은 모두 항상 0이상의 실수값을 가진다. 또한 특이값들은 그 계산 결과가

^③ 전치행렬(transpose)이 역 행렬이 되는 실 정방행렬을 직교행렬이라고 부른다.

^④ 공액(복소)전치행렬(conjugate transpose)이 역 행렬이 되는 복소행렬을 유니타리 행렬이라고 부른다.

내림 차순으로 정렬된다($\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n > 0$).

특이값 분해는 고유값 분해와 유사성이 있지만, 두 행렬 분해 알고리즘 사이에는 근본적인 차이가 있다. 첫째로, 특이값 분해는 두개의 다른 기저(basis)를 사용하지만 고유값 분해는 고유벡터로만 구성된 하나의 기저를 사용한다. 두 번째로, 특이값 분해는 직교성을 가지는 기저를 사용하지만 고유값 분해는 일반적으로 직교성을 가지지 않는 기저를 사용한다. 마지막으로 고유값 분해는 모든 행렬에 대하여 사용할 수 없다. 행렬이 정방행렬인 경우도 역시 무조건 고유값 분해를 사용할 수 없다. 하지만, 특이값 분해는 어떠한 행렬도 분해가 가능하다.

특이값 분해의 기하학적 의미를 살펴보기 위해 다음과 같은 실수 행렬과 벡터에 관한 선형 관계식이 있다고 가정하자.

$$\mathbf{R}\mathbf{x} = \mathbf{x}' \quad (3.2. 2)$$

여기서 행렬 \mathbf{R} 을 특이값 분해를 통하여 다시 전개하면 다음과 같다.

$$\mathbf{U} \Sigma \mathbf{V}^T \mathbf{x} = \mathbf{x}' \quad (3.2. 3)$$

여기서 직교행렬인 \mathbf{U} 와 \mathbf{V}^T 의 기하학적 의미는 회전변환 (rotation transformation) 또는 반전된(reflected) 회전변환을 의미한다. 대각 행렬인 Σ 의 기하학적 의미는 각 좌표성분의 스케일 변환(scale transformation)을 의미한다. 식 (3.2. 3)에서 먼저 $\mathbf{V}^T \mathbf{x}$ 의 계산을 통해 벡터 \mathbf{x} 는 \mathbf{V}^T 에 의해 회전변환이 이루어진후 Σ 로 스케일 변환이 이루어지고, 마지막으로 \mathbf{U} 을 통해 다시 회전되는 것을 알 수 있다. 즉, 위의 행렬 \mathbf{R} 이 $m \times n$ 크기의 행렬이라면, n 차원의 공간에서 m 차원 공간으로의 선형변환인 것이다. 결국 선형변환의 결과는 형태적으로 보면 오로지 행렬 \mathbf{R} 의 특이값들에 의해서만 결정된다.

특이값 분해를 나타낸 식 (3.2. 1)을 간단하게 그림 3과 같이 간단하게 표현할 수 있다. 그림 3과 같이 특이값 행렬이 0인 원소들을 포함하는 경우를 full SVD라고 부른다. 하지만, 실제로 이와 같이 계산에 불필요한 0성분들을 포함시키는 full SVD를 사용하는 경우는 드물다. 또한 분해하고자 하는 행렬의 크기가 커질수록 특이값 분해에 소모되는 계산 비용이 매우 커지기 때문에 full SVD는 사용되지 않는다. 이러한 문제를 해결하고자 효율적인 특이값 분해에 주로 사용되는 것은 그림 4와 같이 특이값 행렬의 0성분들을 제외한 compact SVD 혹은 reduced SVD이다. 특이값 행렬의 0에 대응되는 행렬 U 의 열벡터를 제외하여 그 크기가 감소된다. 그림 5는 특이값 분해 중 가장 많이 사용되는 형태로 truncated SVD(TSVD)를 도시한 것이다. 이는 특이값 행렬 중에서 0이상의 값 중 그 값이 의미가 있는 값만 사용하거나 혹은 특정 특이값 이하의 값들을 모두 0으로 바꾸어 행렬을 재 구성하게 된다. 이를 낮은 계수 행렬 근사법(low rank matrix approximation)이라고 한다. 이렇게 TSVD법을 활용하면 근사화된 행렬을 얻을 수 있고 이는 데이터의 압축, 잡음 제거 등에 활용된다.

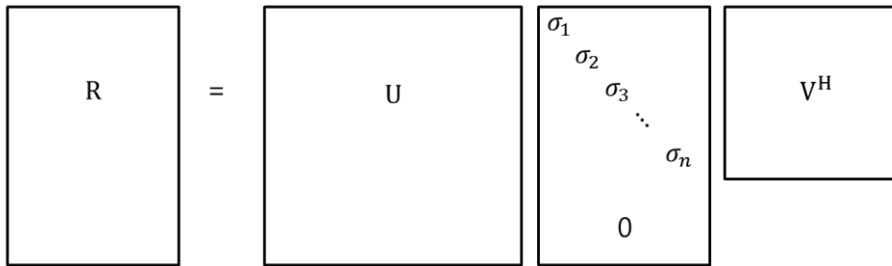


그림 3. Full SVD의 도식화 (행렬의 크기가 $m > n$ 인 경우)

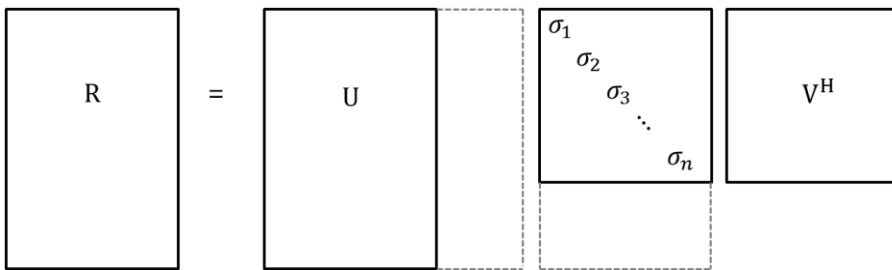


그림 4. compact SVD 혹은 reduced SVD의 도식화 (행렬의 크기가 $m > n$ 인 경우)

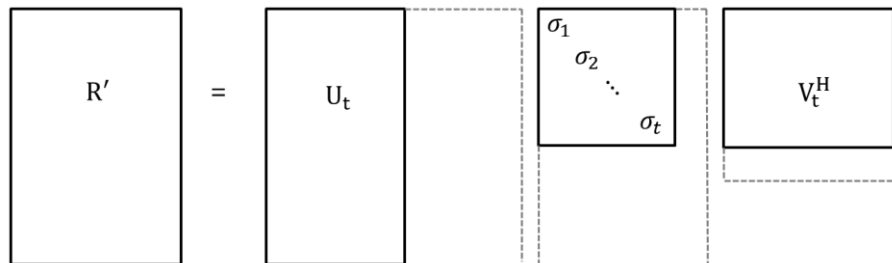


그림 5. Truncated SVD의 도식화(행렬의 크기가 $m > n$ 인 경우)

또한 우리는 특이값 분해를 통해서 우리는 행렬에 다양한 정보를 얻을 수 있다. 첫째로, 특이값 분해를 통해서 우리는 정방 행렬이 역행렬이 존재하지 않는 경우와 비-정방 행렬인 경우에 대한 유사 역행렬 (pseudo inverse matrix)를 구할 수 있다. 행렬 R 의 유사 역행렬(R^\dagger)은 다음과 같이 정의된다.

$$R^\dagger = V \Sigma^\dagger U^H \quad (3.2. 4)$$

여기서 Σ^\dagger 는 Σ 의 유사 역행렬로, 0을 제외한 모든 특이값들의 역수를 취한 값이다. 실제로 행렬 R 과 R^\dagger 의 곱은 단위 행렬이 된다.

$$R^\dagger R = V \Sigma^\dagger U^H U \Sigma V^H = I \quad (3.2. 5)$$

행렬 U 와 V 는 실수인 경우 직교행렬이고 복소수인 경우 유니타리 행렬이기 때문에 $U^H U$ 와 $V V^H$ 는 단위 행렬이 되기 때문이다($U U^H$ 와 $V^H V$ 또한 단위 행렬이 된다). 이러한 특이값 분해를 통하여 유사 역행렬을 계산하면 역행렬이 존재하지 않는 선형 시스템에 대한 최소 제곱 해(least square solution)를 구할 수 있다. 다시 말해, 어떠한 행렬 A 에 대한 유사 역행렬이 A^\dagger 이고, 행렬 A 가 역행렬이 존재하지 않는 경우 $Ax = b$ 의 선형 시스템의 해는 $x = A^\dagger b$ 와 같이 계산되며 이렇게 계산된 x 는 $\|Ax - b\|$ 를 최소화하는 해가 된다.

또한 행렬 R 의 행렬 계수는 특이값 분해를 하였을 때 0이 아닌 특이값들의 개수로 정의할 수 있다. 왜냐하면 $R = U \Sigma V^H$ 에서 행렬 R 의 left singular vector와 right singular vector는 행렬이 완전 계수(full-rank)이기 때문이다. 따라서 $rank(R)$ 은 $rank(\Sigma)$ 와 같다. 앞서 설명한 낮은 계수 행렬 근사법의 경우 사용자가 설정한 특이값 까지의 개수가 그 행렬의 계수가 된다.

특이값 분해를 통해 우리는 또한 행렬의 조건수(condition number)를 계산할 수 있다. 행렬 \mathbf{R} 에 대한 조건수($\text{cond}(\mathbf{R})$)란 다음과 같이 정의 할 수 있다.

$$\text{cond}(\mathbf{R}) = \|\mathbf{R}\| \cdot \|\mathbf{R}^{-1}\| \quad (3.2. 6)$$

즉 조건수란 행렬 \mathbf{R} 의 **norm**과 역행렬 \mathbf{R} 의 **norm**의 곱으로 정의된다. 조건수는 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ 의 선형 시스템에서 구해진 해가 오차가 발생하였을 경우 그 오차의 한계를 나타내는데 사용할 수 있다. 해의 오차를 $\Delta \mathbf{x}$, 이로 인한 \mathbf{b} 의 오차를 $\Delta \mathbf{b}$ 라고 할 때, 상대 오차(relative error)의 한계는 다음과 같이 정의 할 수 있다.

$$\frac{\|\Delta \mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq \text{cond}(\mathbf{R}) \frac{\|\Delta \mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b}\|} \quad (3.2. 7)$$

즉 해의 오차의 한계는 조건수에 의해 제한된다고 볼 수 있다. 그러므로 조건수가 클수록 큰 오차가 생길 가능성이 높고 작을 경우는 오차가 생길 가능성이 낮아지게 된다. 이런 조건수는 특이값을 사용하여 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$\text{cond}(\mathbf{R}) = \frac{\sigma_{\max}(\mathbf{R})}{\sigma_{\min}(\mathbf{R})} = \frac{\sigma_1}{\sigma_n} \quad (3.2. 8)$$

여기서 $\sigma_{\max}(\mathbf{R})$ 혹은 σ_1 은 행렬 \mathbf{R} 의 특이값의 최대값이고 $\sigma_{\min}(\mathbf{R})$ 혹은 σ_n 은 행렬 \mathbf{R} 의 특이값의 0이 아닌 최소값이다. 조건수가 낮은 경우에 우리는 이러한 문제를 좋은 조건의 문제(well-conditioned problems)라고 부르고 반대로 높은 조건수를 가지는 경우에는 이러한 문제를 나쁜 조건의 문제(ill-conditioned problems)라고 부른다. 하지만 조건수만으로는 우리가 풀고자 하는

선형화된 시스템의 안정성과 정확성을 판단하기 어렵다. 다음의 예제를 통하여 그 이유를 설명하겠다.

아래의 크기가 6×4 인 서로 다른 두 행렬 A 와 B 가 있다고 가정하자.

$$A = \begin{pmatrix} 9.73594 & 2.19135 & 7.33131 & 9.41632 \\ -2.88659 & 7.9158 & 0.466684 & 2.97738 \\ 9.11791 & 6.37293 & 1.59616 & 1.50267 \\ -1.86812 & 4.38997 & -2.76339 & 5.74138 \\ 8.40683 & -0.681508 & 6.2758 & 5.20905 \\ 6.76174 & 4.11986 & 9.7466 & 3.62058 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 9.71024 & 2.21838 & 7.32057 & 9.45176 \\ -1.78773 & 5.36328 & 1.28003 & 1.84326 \\ 9.41207 & 5.74784 & 1.79914 & 1.18319 \\ -0.961092 & 2.24766 & -2.08307 & 4.8149 \\ 7.97848 & 0.298202 & 5.96262 & 5.65531 \\ 6.73493 & 4.19529 & 9.72343 & 3.64466 \end{pmatrix}$$

(3.2. 9)

위 두 행렬을 특이값 분해를 통해 특이값을 구해보면 다음과 같다.

$$\Sigma_A = \begin{pmatrix} 24.4801 & 0. & 0. & 0. \\ 0. & 11.7222 & 0. & 0. \\ 0. & 0. & 7.0606 & 0. \\ 0. & 0. & 0. & 5.99327 \\ 0. & 0. & 0. & 0. \\ 0. & 0. & 0. & 0. \end{pmatrix}$$

$$\Sigma_B = \begin{pmatrix} 24.4801 & 0. & 0. & 0. \\ 0. & 7.42429 & 0. & 0. \\ 0. & 0. & 7.11672 & 0. \\ 0. & 0. & 0. & 5.99327 \\ 0. & 0. & 0. & 0. \\ 0. & 0. & 0. & 0. \end{pmatrix}$$

(3.2. 10)

식 (3.2. 10)을 통해 우리는 행렬 A 와 B 가 비록 다른 값을 가지고 있지만 행렬계수와 행렬조건수가 같은 것을 확인할 수 있다. 행렬 A 의 특이값들은 다소 완만하게 특이값들이 감소하는 경향을 가지고 있지만, 행렬 B 는 이와는 달리 첫 번째 특이값 이후에 급격하게 값이 감소하는 것을 확인 할 수 있다. 만약 두 행렬이 어떠한 선형 시스템을 풀기위해 정의된 행렬($Ax = b$ 혹은 $Bx = b$)이고 해를 구했을때의 오차를 단순히 조건수만으로 판단한다면 두 경우 모두 동일한 오차와 안정성을 가지고 있다고 판단할 수 있다. 하지만 실제 두 행렬은 특이값의 최대값과 최소값 사이의 값이 다르며 이는 역행렬(혹은 유사 역행렬)을 계산하였을 때 다른 결과와 오차를 보여줄 수 있다. 앞선 예제처럼 그림 6과 같이 조건수와 행렬 계수가 같지만 그 특이값들의 분포가 극단적으로 크거나 낮은경우, 두 행렬을 통해 선형 시스템의 해를 구한다면 큰 특이값들을 더 많이 가지고 있는 경우가 더욱더 안정적이고 의미있는 해를 구할 수 있을것이다. 정리하자면, 특이값 분해를 통해 구해진 특이값들은 값이 클수록 그 의미가 있다. 특이값의 개수는 행렬의 계수를 의미하며, 행렬의 계수가 크다는 것은 행렬의 정보를 더욱더 많이 사용할 수 있다는 뜻이 된다. 만일 구해진 특이값들이 0에 가깝게 작은 값들이 많다면 행렬 계수에 포함될 수는 있지만, 실제 계산상에서는 오차를 만드는데 기여할 뿐이다. 즉, 선형시스템을 구성하고있는 행렬은 그 계수가 많을수록, 조건수가 낮을수록, 그리고 그 특이값들이 모두 클수록(혹은 0에 가까운 값이 적을 수록) 안정적이게 해를 구할 수 있다.

우리가 다루는 파형역산 문제는 대부분 특이행렬 (singular matrix)^⑤에 가까운 시스템을 다루게 된다. 그렇기 때문에 매우 높은 조건수를 가지고 있고, 행렬이 완전 계수가 아닌 경우가 대부분이다. 따라서 단순히 조건수만을 가지고 비교하는 것은 위험한 판단이기 때문에 특이값 분해를 통한 특이값 분석이 필수적이다. 4장에서는 우리가 다루는 라플라스-푸리에 혹은 주파수 영역에서 구성되는 자코비안 행렬의 특이값 분해를 통하여 그 특이값들을 분석하고 비교할 것이다.

^⑤ 정방행렬에 대해서만 해당되며, 행렬의 역 행렬이 존재하지 않는 경우이다. 즉, 행렬식이 0인 경우이다.

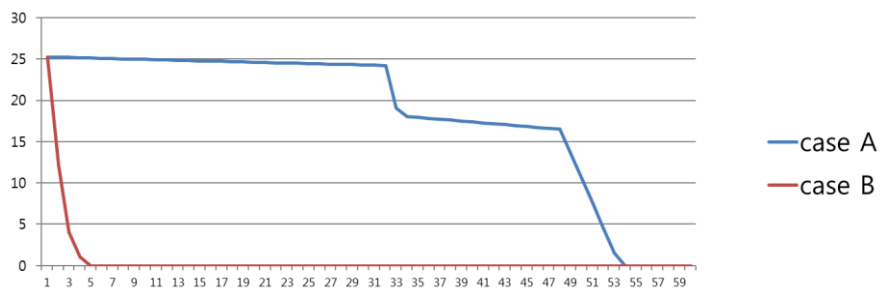


그림 6. 같은 조건수와 행렬 계수를 가지지만 완전히 다른 특이값들을 가지는 경우

제 4 장 수치 실험 예제

4.1 주파수 및 라플라스-푸리에 영역의 모델 분해 행렬 분석

모델 분해 행렬을 통한 파형역산 시스템의 분석을 위하여 기존 주파수 영역과 라플라스-푸리에 영역에서의 모델 분해 행렬을 계산 후 비교 및 분석 하였다. 모델 분해 행렬을 구성하는데 (3.1. 14)와 (3.1. 15)를 활용하여 간단한 지수함수의 곱으로 모델 분해 행렬을 계산하였다. 본 연구에서의 모델 분해 행렬은 반복적 수치 풀이법의 첫 번째 단계에 대한 분석으로, 3.1장에서 언급하였듯이 지수함수의 곱으로 구성된 모델 분해 행렬은 주파수 영역과 라플라스-푸리에 영역의 공간에 대한 푸리에 역변환과 라플라스 역변환의 역할이 얼마나 정확하게 작동하는지를 수치적으로 실험한다고 볼 수 있다. 또한 비선형 파형역산 시스템을 선형화하여 식을 전개하였으므로 실험결과들은 유사 선형 구간(quasi-linear zones) 내에만 해당된다.

또한 우리는 계산된 모델 분해 행렬과 단위 행렬과의 유사도를 수치적으로 표현하기 위하여 다음과 같은 식을 도입해 행렬의 퍼짐(spread) 정도를 계산 하였다(Menke 2012).

$$\text{spread}(\mathbf{R}) = \|\mathbf{R} - \mathbf{I}\|_F^2 = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M (R_{ij} - \delta_{ij})^2$$

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad (4.1. 1)$$

식 (4.1. 1)은 행과 열이 M 크기를 가지는 정방행렬 \mathbf{R} 에 대한 퍼짐 정도를 계산하는 식으로써, 행렬이 단위 행렬과 가까울수록 그 값은 0에 가까워 진다.

모델 분해 행렬 계산을 위해 우리는 두 가지 경우를 가정하였다. 첫째로 취득 자료의 모든 주파수 대역을 온전하게 사용할 수 있는 경우로 0Hz부터 12.5Hz까지 0.25Hz간격으로 자료가 있다고 가정하였다. 둘째로 취득 자료의 저주파수 성분이 없는 경우로 3Hz부터 12.5Hz까지 0.25Hz간격으로 자료가 있다고 가정하였다. 그림 7은 모든 주파수 대역을 사용한 경우의 주파수 영역의 모델 분해 행렬이다. 이처럼 모든 주파수 대역을 사용하여 모델 분해 행렬을 구성한 결과, 모델 분해 행렬은 단위행렬과 매우 유사하게 계산된다. 또한 표 1에서도 확인할 수 있듯이, 퍼짐 정도가 0에 매우 가까운 값을 가지는 것을 확인할 수 있다. 이처럼 모든 주파수대역의 자료를 이상적으로 사용하는 경우, 주파수 영역에서의 파동경로를 구성하는 벡터들이 직교 기저를 가지게 된다. 즉, 저주파수 성분을 포함하는 모든 적분 구간(주파수 대역)에 대하여 직교 기저로 구성된 자코비안 행렬을 통해 헤시안 행렬을 계산하게 되면, 헤시안 행렬은 완전 계수(full-rank)인 행렬이 되고 모델 분해 행렬또한 단위행렬과 매우 가까워 진다. 다시말해, 모든 주파수 대역을 사용할 수 있다면 우리는 기존의 주파수 영역 파형역산을 통해 모델 매개변수를 정확하게 추정할 수 있다.

하지만 저주파수 대역을 사용하지 않는 경우 그림 8와 같이 주파수 역역 모델 분해 행렬은 비-대각 성분들이 존재하게 된다. 또한 $\text{spread}(\mathbf{R})$ 값 또한 25.0으로 모든 주파수 대역을 사용한 경우와는 많은 차이를 가지는 것을 확인할 수 있다. 그림 9는 라플라스-푸리에 영역에서의 모델 분해 행렬로써 사용된 주파수 대역은 그림 8의 경우와 동일하다. 라플라스-푸리에 영역에 사용된 라플라스 감쇠 상수를 하나만($\sigma = 1\text{s}^{-1}$) 사용한 경우이다. 이 경우 역시 모델 분해 행렬에 비-대각 성분이 존재하는 것을 확인할 수 있다. $\text{spread}(\mathbf{R})$ 값은 24.99로 그림 8의 경우와 유사한 값을 가지는 것을 확인할 수 있다. 이처럼 자료의 주파수 대역이 제한된

환경에서 라플라스 감쇠상수를 한가지만 사용한 라플라스-푸리에 영역과 주파수 영역의 파형역산 능력은 차이가 없는 것을 모델 분해 행렬을 통해 확인할 수 있다.

하지만, 일반적으로 라플라스-푸리에 영역 파형역산은 여러 개의 라플라스 감쇠 상수(multi Laplace damping constants)를 사용한다. 즉, 하나의 주파수 성분에 다양한 라플라스 감쇠 상수를 적용한다. 이처럼 다양한 라플라스 감쇠 상수를 적용한 라플라스-푸리에 영역에서의 모델 분해 행렬은 그림 10에서 확인할 수 있다. 그림 10은 라플라스 감쇠 상수(σ)를 $1s^{-1}$ 부터 $10s^{-1}$ 까지 1간격으로 총 10개의 라플라스 감쇠 상수를 사용했다. 주파수 대역이 제한된 상황에서의 주파수 영역 모델 분해 행렬과 라플라스 감쇠 상수를 하나만 사용한 라플라스-푸리에 영역 모델 분해 행렬과는 달리 다양한 라플라스 감쇠 상수를 사용한 라플라스-푸리에 영역 모델 분해 행렬은 비-대각 성분이 많이 감소한 것을 확인할 수 있다. 또한 spread(**R**) 값은 13.85로 많이 감소 하였다. 다양한 라플라스 감쇠 상수를 사용함으로써 모델 분해 행렬이 단위 행렬에 가까워지게 되었다. 즉, 동일한 제한된 주파수 대역에서 다양한 라플라스 감쇠 상수를 사용한다면, 라플라스-푸리에 영역에서의 파형역산이 주파수 영역의 파형역산보다 더 뛰어난 성능을 보일 수 있다는 결과를 보여준다.

라플라스-푸리에 영역은 다양한 라플라스 감쇠 상수를 사용함으로써 기존의 주파수 영역보다 상대적으로 더 많은 자료를 시간 영역 자료에서부터 생성할 수 있게 된다. 이렇게 새롭게 생성된 자료들은 서로 선형 독립(linearly independent)한 관계를 가지게 된다. 새롭게 생성된 자료들이 서로 1차 독립인 관계인 것은 다음과 같이 론스키언(Wronskian)을 이용하여 증명할 수 있다.

우선, 주파수 영역의 파동경로와 라플라스-푸리에 영역의 파동경로가 서로 1차 독립임을 밝히도록 하겠다. 주파수 영역에서의 파동경로(J_f)와 라플라스-푸리에 영역에서의 파동경로(J_{lf})를 하나의

송신원과 수신기에 대한 진폭이 1인 근사화된 그린 함수를 사용하여 다음과 같이 지수 함수의 형태로 나타낼 수 있다.

$$J_f(\mathbf{x}|\mathbf{s}) = -\omega^2 \exp(ik_0(\hat{\mathbf{r}} + \hat{\mathbf{s}}) \cdot \mathbf{x}) \quad (4.1. 2)$$

$$J_{lf}(\mathbf{x}|\mathbf{s}) = s^2 \exp(\alpha_0(\hat{\mathbf{r}} + \hat{\mathbf{s}}) \cdot \mathbf{x}) \quad (4.1. 3)$$

여기서, ik_0 는 배경 속도가 c_0 인 매질에서의 파수($i\omega/c_0$)이고 α_0 는 라플라스 넘버($s/c_0 = (\sigma + i\omega)/c_0$)이다. 송신원에서 산란 매질까지의 벡터와 수신기에서 산란 매질까지의 벡터의 합성인 $\hat{\mathbf{r}} + \hat{\mathbf{s}}$ 은 송신원과 수신기의 분포에 따라 파동경로가 어떤 방향으로 그 값들이 표현되는지 결정된다. 일반적으로 송신원과 수신기가 모두 해수면 표면에 위치되어 있다면(surface seismic profile), 벡터의 합성에 따라 수직인 방향으로 파동장값을 표현하게 된다. 론스키언을 이용하여 1차 독립인 관계를 보이기위하여 위치 벡터 \mathbf{x} 에 대한 론스키언은 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$\begin{aligned} W(\mathbf{x}) &= \begin{vmatrix} J_f & J_{lf} \\ J'_f & J'_{lf} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\omega^2 \exp(ik_0 \hat{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{x}) & s^2 \exp(\alpha_0 \hat{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{x}) \\ -\omega^2 ik_0 \hat{\mathbf{A}} \exp(ik_0 \hat{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{x}) & s^2 \alpha_0 \hat{\mathbf{A}} \exp(\alpha_0 \hat{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{x}) \end{vmatrix} \\ &= \omega^2 s^2 \exp\left\{\left(\frac{\sigma}{c_0} + 2ik_0\right) \hat{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{x}\right\} \left(-\frac{\sigma}{c_0}\right) \hat{\mathbf{A}} \end{aligned} \quad (4.1. 4)$$

여기서 $\hat{\mathbf{A}}$ 는 $\hat{\mathbf{r}} + \hat{\mathbf{s}}$ 인 방향 벡터 이다. 계산 결과, 식 (4.1. 4)의 값은 라플라스 감쇠 상수인 σ 가 0이 아닌경우(복소 주파수를 사용한 경우)에 위치 벡터 \mathbf{x} 가 표현하는 모든 공간에 대하여 론스키언 값이 0이 아니므로 J_f 와 J_{lf} 는 서로 일차 독립임으로 알 수 있다. 즉, 복소 주파수의 실수부분인 라플라스 감쇠 상수의 존재로 동일한 주파수에 대하여 주파수 영역과 라플라스-푸리에 영역의 파동경로는 서로 1차 독립 관계 이다. 위의 증명을 확장하여 동일한 주파수에 대하여 3개의 라플라스 감쇠 상수를 사용($s_1 = \sigma_1 + i\omega, s_2 = \sigma_2 +$

$i\omega, s_3 = \sigma_3 + i\omega$)하여 라플라스-푸리에 영역의 자료를 늘렸다고 가정하면, 다음과 같은 론스키언을 나타낼 수 있다.

$$W(\mathbf{x}) = \begin{vmatrix} J_{lf}(s_1) & J_{lf}(s_2) & J_{lf}(s_3) \\ J_{lf}(s_1)' & J_{lf}(s_2)' & J_{lf}(s_3)' \\ J_{lf}(s_1)'' & J_{lf}(s_2)'' & J_{lf}(s_3)'' \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} s_1^2 \exp(\alpha_{0,1} \hat{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{x}) & s_2^2 \exp(\alpha_{0,2} \hat{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{x}) & s_3^2 \exp(\alpha_{0,3} \hat{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{x}) \\ s_1^2 \alpha_{0,1} \hat{\mathbf{A}} \exp(\alpha_{0,1} \hat{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{x}) & s_2^2 \alpha_{0,2} \hat{\mathbf{A}} \exp(\alpha_{0,2} \hat{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{x}) & s_3^2 \alpha_{0,3} \hat{\mathbf{A}} \exp(\alpha_{0,3} \hat{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{x}) \\ s_1^2 \alpha_{0,1}^2 \hat{\mathbf{A}}^2 \exp(\alpha_{0,1} \hat{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{x}) & s_2^2 \alpha_{0,2}^2 \hat{\mathbf{A}}^2 \exp(\alpha_{0,2} \hat{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{x}) & s_3^2 \alpha_{0,3}^2 \hat{\mathbf{A}}^2 \exp(\alpha_{0,3} \hat{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{x}) \end{vmatrix}$$

$$= s_1^2 s_2^2 s_3^2 \hat{\mathbf{A}}^2 \exp\{(\alpha_{0,1} + \alpha_{0,2} + \alpha_{0,3}) \hat{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{x}\} (\alpha_{0,2} \alpha_{0,3} - \alpha_{0,1} \alpha_{0,3} + \alpha_{0,1} \alpha_{0,2})$$

,

$$\alpha_{0,n} = \frac{\sigma_n + i\omega}{c_0}$$

(4.1. 5)

식 (4.1. 5)의 결과 역시 위치 벡터 \mathbf{x} 가 표현하는 모든 공간에 대하여 그 값이 0이 아닌 것을 확인할 수 있다. 즉, 라플라스 영역의 파동경로들은 서로 선형 독립인 관계임을 확인할 수 있다. 다시 말해, 라플라스-푸리에 영역에서 사용되는 라플라스 감쇠 상수가 많아질수록 서로 선형 독립인 기저가 많아지게 된다는 뜻이다. 이는 라플라스-푸리에 영역 자코비안 행렬이 주파수 영역 자코비안 행렬보다 상대적으로 더 많은 선형 독립 기저를 가지게 된다는 것을 뜻하며, 상대적으로 선형 독립 기저가 많은 라플라스-푸리에 영역 자코비안 행렬은 주파수 영역보다 우리가 추정하고자 하는 모델 부분공간(subspace)을 방향 벡터 $\hat{\mathbf{A}}$ 가 표현할 수 있는 부분을 더 많이 생성(span)할 수 있게 되는것이다. 또한 이렇게 선형 독립인 기저를 바탕으로 만들어지는 헤시안 행렬의 계수가 주파수 영역보다 라플라스-푸리에 영역이 더 높아지게 된다. 따라서 기존의 주파수 대신에 복소 주파수를 사용하게되면 우리가 찾고자 하는 모델 매개변수를 상대적으로 정확하게 추정할 수 있는 원인이 된다.

정리하면, 저주파수를 포함하여 모든 주파수 대역을 사용할 수 있다면, 기존의 주파수 영역에서의 자코비안 행렬을 구성하는 벡터들은 서로 직교 기저가 된다. 하지만, 실제로 우리가 사용할 수 있는 주파수대역은 한정적이며 특히 저주파수 성분은 낮은 신호 대 잡음비로 사용할 수 없다. 따라서 한정된 주파수 대역에서 주파수 영역 자코비안 행렬은 직교 기저가 될 수 없고, 이를 통해 계산된 모델 분해 행렬은 그림 8과 같이 비-대각 성분에 0이 아닌 값들이 존재하게 된다. 반면 라플라스-푸리에 영역의 경우 라플라스 감쇠 상수를 많이 사용할수록 자코비안 행렬을 구성하는 벡터가 서로 1차 독립인 기저들이 많아지게되고, 주파수 영역보다 상대적으로 더 많은 모델 부분공간을 생성할 수 있게 되는것이다.

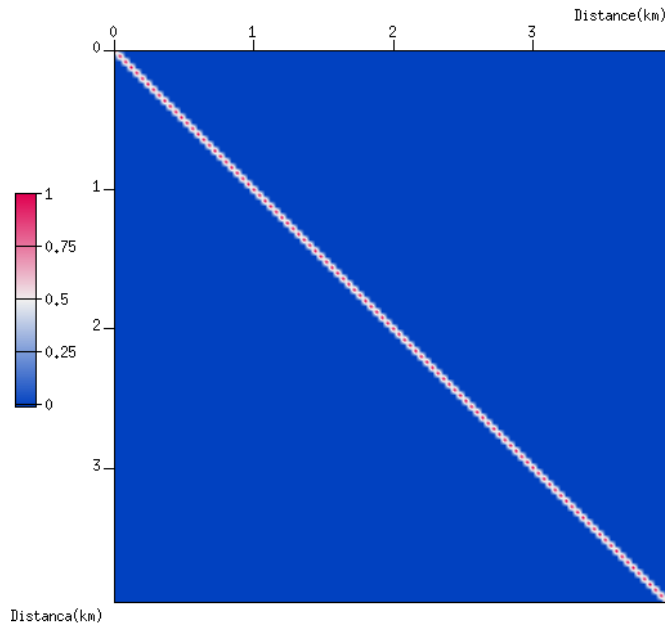


그림 7. 모든 주파수 대역을 사용한 경우의 주파수 영역의 모델 분해 행렬

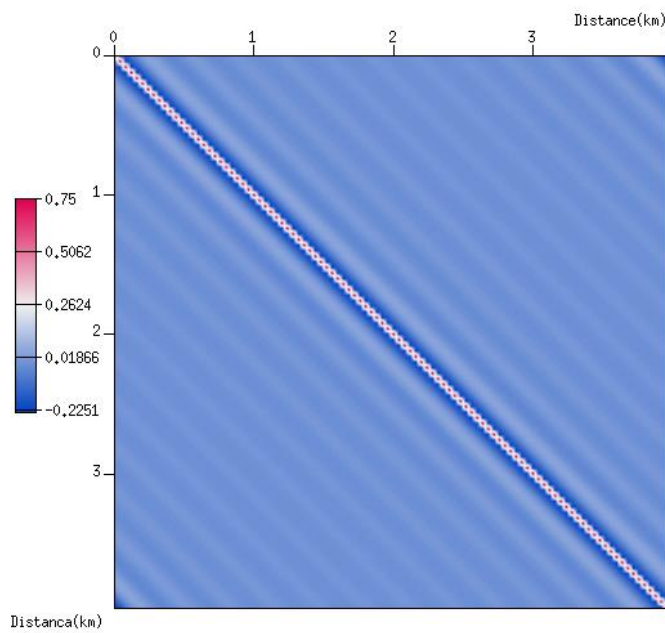


그림 8. 제한된 주파수 대역을 사용한 경우의 주파수 영역의 모델 분해 행렬

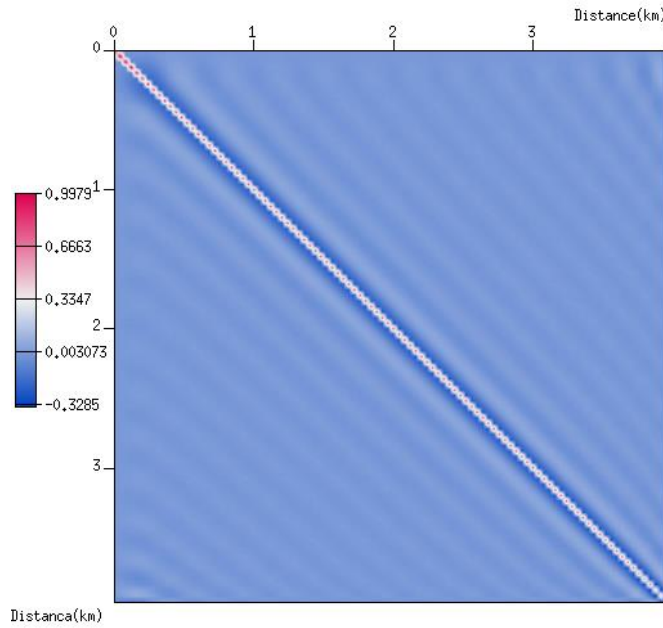


그림 9. 제한된 주파수 대역을 사용한 경우의 라플라스-푸리에 영역의 모델 분해 행렬 (1개의 라플라스 감쇠 상수 사용)

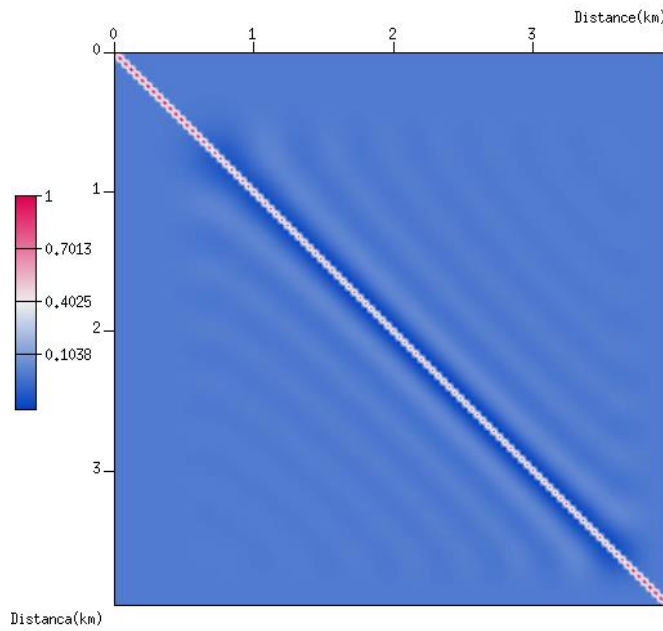


그림 10. 제한된 주파수 대역을 사용한 경우의 라플라스-푸리에 영역의 모델 분해 행렬 (10개의 라플라스 감쇠 상수 사용)

spread(R)	
Spread value of the model resolution matrix in frequency domain with full-band case	1.682e-26
Spread value of the model resolution matrix in frequency domain with band-limited case	25.0
Spread value of the model resolution matrix in Laplace-Fourier domain with band-limited case (using only one Laplace damping constant)	24.99
Spread value of the model resolution matrix in Laplace-Fourier domain with band-limited case (using 10 Laplace damping constants)	13.85

표 1. 각 모델 분해 행렬의 퍼짐 정도

4.2 주파수 및 라플라스-푸리에 영역의 특이값 분해 분석

우리는 모델 분해 행렬 분석을 통해 주파수 대역이 한정적인 경우, 많은 라플라스 상수를 사용하는 라플라스-푸리에 영역의 과형역산이 주파수영역 과형역산보다 추정하고자하는 모델 매개 변수를 더욱 실제 모델에 근접하도록 추정할 수 있다는 것을 확인했다. 이번 수치 실험은 앞서 특이값 분해를 통하여 주파수 영역과 라플라스-푸리에 영역의 자코비안 행렬을 분석하여 각 영역의 과형역산의 성능을 비교를 할것이다. 식 (2.2. 8)을 통해 우리는 자코비안 행렬이 모델 변수와 자료 변수 사이를 연결하고 있는 시스템인 것을 확인할 수 있다. 앞서 3.2장에서 특이값 분해의 기하학적 의미에서 두 벡터 사이의 행렬은 선형변환을 나타낸다고 볼 수 있다. 이를 우리가 다루는 과형역산 시스템에 적용하여 해석하기위해 식 (2.2. 8)을 다시 특이값 분해를 통해 정리하면 다음과 같다.

$$J\Delta m = U \Sigma V^H \Delta m = \Delta \psi \quad (4.2. 1)$$

여기서 자코비안 행렬(J)의 크기가 $m \times n$ 이고 $m > n$ 인 관계를 가진다고 가정한다. 우선 $V^H \Delta m$ 의 계산을 통해 모델 영역(model domain)의 Δm 은 회전변환이 일어나게 된다. 이후 자코비안 행렬의 특이값(Σ)들로 스케일 변환이 일어나며, 끝으로 U 과의 계산을 자료 영역(data domain)으로 m 차원 변환이 일어나게 된다. 즉, 자코비안 행렬의 특이값이 우리가 다루는 과형역산시스템의 중요한 요소라고 볼 수 있다. 또한 3.2장에서 소개한 유사 역행렬을 사용하여 Δm 을 계산하는 경우에도 자코비안 행렬의 특이값들이 어떠한 값을 가지는지가 가장 중요한 요소임을 알 수 있다. 헤시안 행렬의 경우, 식 (2.2. 10)의 마지막 식에서 볼 수 있듯이, 모델 업데이트를 계산하기 위하여 우리는 헤시안 행렬의 역행렬을 계산 하여야 하는데, 특이값 분해를 통해 헤시안 행렬의 특이값들이 충분히 큰

값의 유의미한 값들을 가지고 있다면 그 역 행렬 또한 안정적으로 계산될 수 있으며 물성치를 추정하는데 발생 할 수 있는 수치적 오차가 줄어들게 된다. 즉, 행렬의 특이값들이 전반적으로 0과 매우 가까운 값들로 구성되어 있다면 그 행렬의 유사 역행렬 혹은 역행렬을 계산하는데 매우 불안하며(매우 작은값의 역수를 계산하기 때문) 특이 행렬이 될 가능성이 매우 높다. 따라서, 만일 라플라스-푸리에 영역의 자코비안 행렬의 특이값들이 주파수 영역의 자코비안 행렬보다 전반적으로 큰 값들을 가지고 있다면, 우리는 라플라스-푸리에 영역의 파형역산이 주파수 영역 파형역산보다 안정적이라고 볼 수 있다.

자코비안 행렬의 계산과 특이값 분해의 경우 큰 규모의 문제에 대하여 계산에 필요한 메모리 공간이 방대하며 계산 시간이 많이 걸려 본 연구에서는 실험의 효율을 위하여 일반적인 크기의 1차원 파형역산 실험(Dongarra *et al.*, 1978)과 간단한 구조와 작은 규모의 2차원 파형역산 실험을 진행하였다. 1차원 모델을 실험에 사용한 경우, 계산되는 자코비안 행렬의 특이값들은 깊이에 따라 각 노드점의 특이값들을 볼 수 있는 장점이 있다. 2차원 실험의 경우, 1차원 실험에서 얻은 결과가 2차원에서도 적용가능한지를 판단하기 위하여 소규모로 진행하였다.

우선 1차원 실험에 사용된 속도모델은 2개의 인공합성 자료를 사용하였다. 첫 째로, 상대적으로 일반적인 지층의 구조라고 볼 수 있는 깊이가 깊어질수록 선형적으로 속도가 증가하며 다양한 단층들이 존재하는 Marmousi2 모델(그림 11)을 사용하였다. 실제 실험에 사용된 지점은 좌측에서 3km 떨어진 지점의 깊이 방향의 속도 모델(그림 12)을 사용하였다. 특별히 3km 지점에서 깊이 1km지점에서 약 40m정도의 두께로 저속도의 가스층이 존재하는 것이 특징이다. 두 번째로 사용된 모델은 SEG/EAGE 3D salt 모델의 2차원 단면(그림 13)으로 P파속도가 4.45km/s로 고속도를 가지는 암염돔이 상부에 크게 위치하며 속도의 차이가 크게 나타나는 모델이다. 실험에 사용된 1차원 모델은 좌측에서 8.6km 떨어진 지점의 깊이 방향의 속도 모델(그림 14)을 사용하였다. 본 1차원

인공합성자료 실험에서는 주파수 영역과 라플라스-푸리에 영역
파형역산모두 동일한 l_2 -norm 목적함수를 사용하였다. 그 이유는,
단일 송신원과 단일 수신기에서는 오프셋에 따라 파동장의 진폭이
감소되는 현상이 없기 때문이다.

2차원 실험에 사용된 속도모델은 2개의 작은 규모의 인공합성
자료를 사용하였다. 첫 째로, 단순한 층서구조의 형태를 가진
모델로 중간의 250m지점에 1.2km/s의 저속도층을 포함하고
있다(그림 15). 두 번째로 사용된 속도모델은 2km/s의 배경속도를
가지며 총 4개의 비 이상체(anomalies)를 각기 다른 속도로 가지고
있는 모델이다. 비 이상체의 속도는 왼쪽부터 순서대로 4.0km/s,
3.5km/s, 3.3km/s, 3.0km/s이다(그림 16). 두 모델 모두 가로 1km, 세로
0.5km의 규모를 가지고 있다. 두 모델에 대하여 각 각 5개의
송신원을 200m 간격으로 동일하게 사용하였다. 수신기의 경우는
가로 방향 격자에 모두 위치한다고 가정하였다. 또한 2차원 모델의
인공합성자료 실험에서는 주파수 영역과 라플라스-푸리에 영역
파형역산을 l_2 -norm 목적함수와 로그목적함수에 대하여 모두
수행하였다.

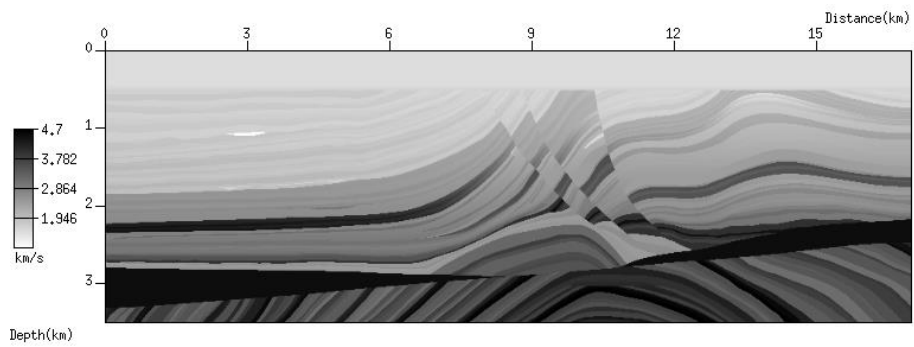


그림 11. 2차원 Marmousi2 P파 속도 모델

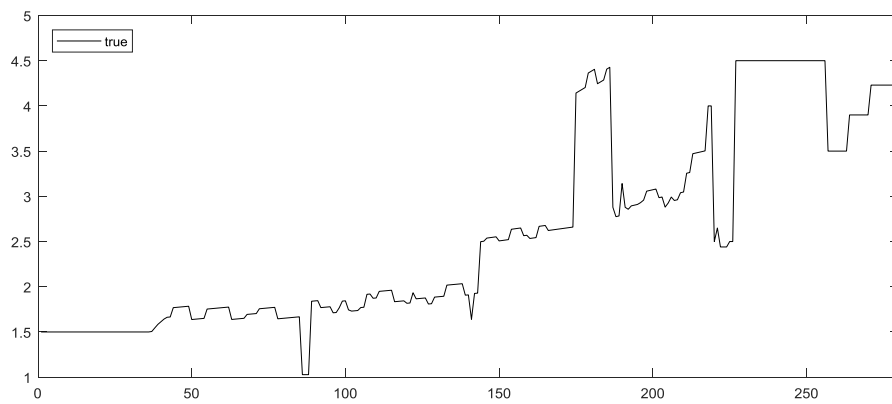


그림 12. Marmousi 2 P파 속도 모델의 3km 지점의 1차원 속도 모델

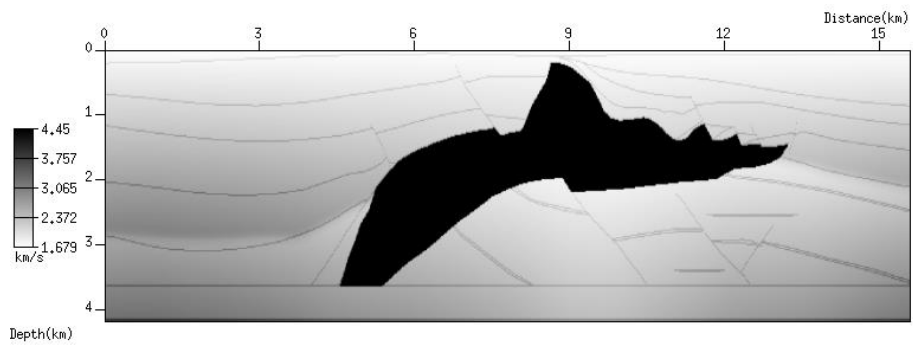


그림 13. 3차원 SEG/EAGE salt P파 속도 모델의 2차원 단면

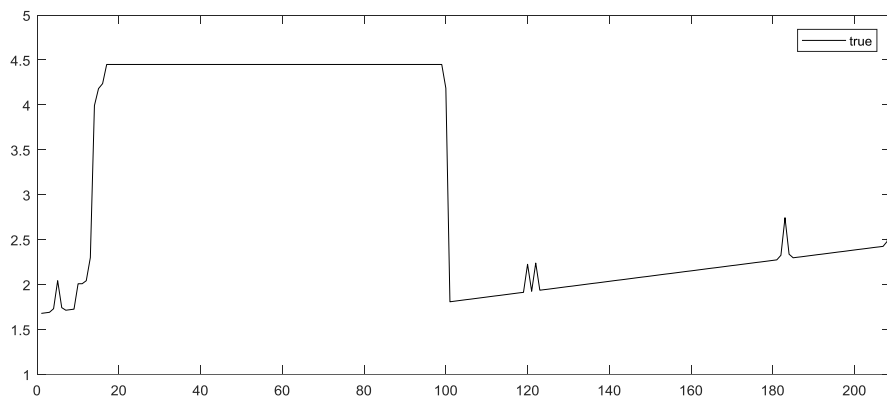


그림 14. SEG/EAGE salt P파 속도 모델의 8.6km 지점의 1차원 속도 모델

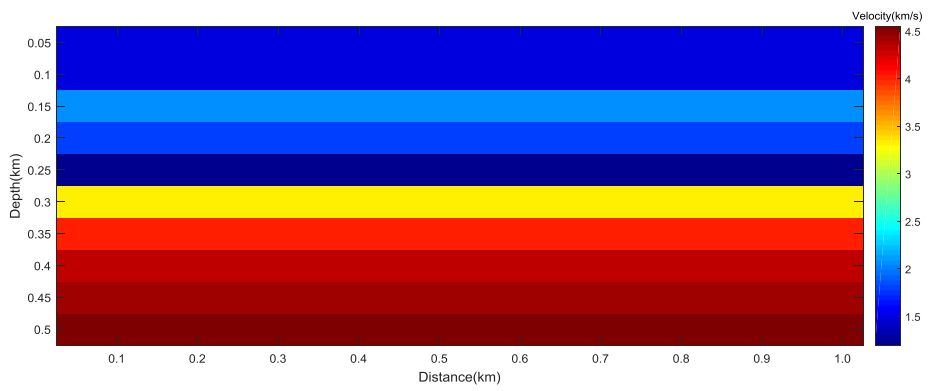


그림 15. 2차원 층서 모델

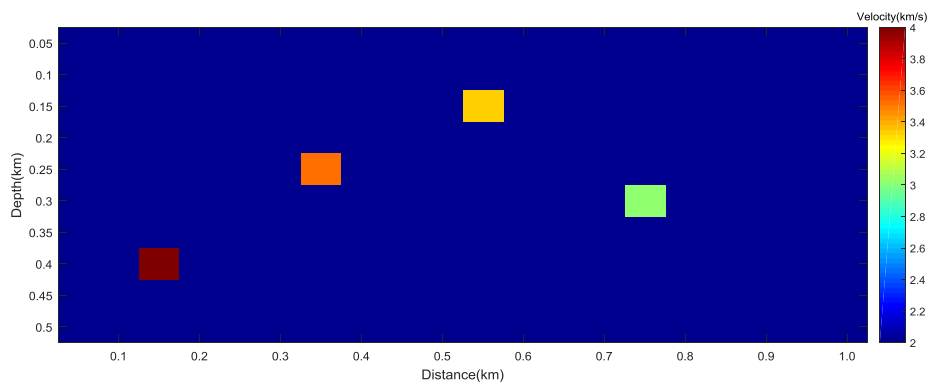


그림 16. 2차원 비 이상체 모델

1차원 Marmousi2 model 수치 실험

첫번째 속도 모델인 Marmousi2 모델은 깊이 25m 지점에 한 개의 송신원과 수신기가 있다고 가정하였다. 공간 격자 간격은 12.5m로 가정하였고 총 3.5km의 깊이를 가지는 모델이며 모델링에 사용된 격자 개수는 280개이다. 속도모델 상부는 고정단 반사 경계를 가지고 있고 속도모델 하부는 흡수 경계 조건을 가진다고 설정하였다. 자코비안 행렬은 파형역산에 사용되는 초기속도모델에 따라 그 값이 달라지기 때문에 본 연구에서는 총 3가지의 초기속도 모델을 고려하였다. 그림 17 에서 초록색 선은 깊이가 깊어짐에 따라 단조롭게 속도가 증가하는 단조선형증가모델, 파란색 선은 모든 깊이에 2km/s로 속도가 일정한 균질한 속도모델, 마지막으로 빨간색 선은 실제 속도모델을 평활화(smoothing)한 평활화된 속도모델로 세 가지의 초기속도모델중 가장 실제 속도모델과 근접한 모델이다.

파형역산에 사용된 주파수대역은 3Hz부터 10Hz까지 0.1Hz의 간격을 두고 사용하여 총 71개의 주파수 자료를 사용하였다. 라플라스-푸리에 영역 파형역산의 경우 각 주파수마다 여러 가지의 라플라스 감쇠상수를 사용하여 복소주파수를 만들게 되는데, 여기서 사용된 라플라스 감쇠상수는 표 2와 표 3에 정리되어있다. 표 2는 사용되는 최대 라플라스 감쇠상수를 5.05 s^{-1} 로 고정된 상태에서 초기 라플라스 감쇠상수와 그사이의 라플라스 감쇠상수 간격에 변화를 주는 방식을 적용하였다. 표 3은 사용되는 라플라스 감쇠상수 간격을 0.125 s^{-1} 로 고정시킨 상태에서 사용하는 라플라스 감쇠상수 개수를 늘려 최대 라플라스 감쇠상수가 증가하는 방식을 적용하였다. 위 방식과 같이 주파수와 복소주파수를 설정하면, 주파수 영역 파형역산의 경우 찾고자 하는 모델 매개변수의 개수(280개)보다 사용하는 자료의 개수(71개)가 적기 때문에 부정 문제(under-determined problem)에 해당되며 라플라스-푸리에 영역 파형역산의 경우 그 반대의 경우로 과도하게 결정된 문제(over-determined problem)에 해당된다. 따라서 본 실험에서는 주파수 영역 파형역산의 경우 자코비안 행렬의 특이값을 71개까지만 계산할 수

있으므로 라플라스-푸리에 영역의 자코비안 행렬의 특이값을 71개까지만 비교하도록 하였다. 감쇠된 최소 제곱 해에 사용되는 감쇠상수 혹은 정규화 상수(λ)는 0.00005를 사용하였다.

그림 18은 단조선형증가모델을 초기속도모델로 사용한 실험 결과이다. 여기서 검정색 선은 주파수 영역의 자코비안 행렬의 특이값, 시안색 선은 라플라스-푸리에 영역에서 라플라스 감쇠상수 그룹1을 사용한 경우의 자코비안 행렬의 특이값, 초록색 선은 라플라스 감쇠상수 그룹2을 사용한 경우, 파란색 선은 라플라스 감쇠상수 그룹3을 사용한 경우, 마지막으로 빨간색 선은 라플라스 감쇠상수 그룹4를 사용하여 가장 많은 복소주파수를 사용한 경우이다. 실험 결과, 주파수 영역의 자코비안 행렬의 특이값보다 복소주파수를 사용한 라플라스-푸리에 영역의 자코비안 행렬의 특이값들이 모두 주파수 영역보다 높은 값을 가지는 것을 확인 할 수 있다. 자세한 분석을 위해 1~11번, 31~41번, 그리고 50~71번째까지의 모델 매개변수들을 확대하여 그림 19에 도시 하였다. 모든 모델 매개변수에 대하여 라플라스 감쇠상수를 가장 많이 사용하는 그룹4를 사용할 때 그 특이값들이 가장 높은 것을 확인할 수 있다. 특히 1~11번 모델 매개변수들에서 그 차이가 가장 뚜렷하게 확인되었으며, 모델 매개변수가 끝으로 갈수록 차이는 미묘해졌다. 또한, 50번째 모델 매개변수 이후부터 주파수 영역과 라플라스-푸리에 영역의 차이는 더 커진 것을 확인할 수 있다. 이는 다시 말해, 모델이 깊어질수록 라플라스-푸리에 영역 파형역산이 주파수 영역 파형역산보다 더 안정적이고 유의미한 정보로 업데이트가 가능하단 것을 의미한다.

이어서 그림 20은 균질한 속도모델을 초기속도모델로 사용한 경우의 실험 결과이다. 앞선 단조선형증가모델과는 달리 주 영역 모두 국소반올림오차(local round off error)가 더 후반부에 위치한 것을 확인할 수 있다(약 52번째의 모델 매개변수). 이러한 이유는, 단조선형증가모델과는 달리 균질한 속도모델을 실제 속도모델과의 차이가 매우 크기 때문에 추정해야하는 모델 매개변수가 상대적으로 많기 때문에 발생한 현상이라고 볼 수 있다. 그림 21은

실험결과를 모델 매개변수 구간별로 확대한 것을 도시하였다. 균질한 속도모델을 초기속도모델로 사용한 결과, 라플라스 감쇠상수를 가장 많이 사용한 라플라스-푸리에 영역의 자코비안 행렬의 특이값이 모든 모델 매개변수에 대하여 가장 높은 값을 가지는 것을 볼 수 있다. 특히 이번 실험에선 초기 모델 매개변수들은 주파수 영역과 각 라플라스 감쇠상수 그룹마다의 차이가 명확하게 들어난 것을 볼 수 있다. 특히 주파수 영역 자코비안 행렬의 특이값은 후반부의 모델 매개변수들의 값이 급격하게 떨어지는 것을 볼 수 있는데, 이러한 급격한 변화는 실제 그래디언트 계산과 헤시안 행렬의 계산에도 불안정한 결과를 제공하는 원인이 될 수 있다.

그림 22은 실제 속도모델을 평활화한 속도모델을 초기속도모델로 사용한 경우의 실험 결과이다. 이번 실험 결과 역시 라플라스-푸리에 영역의 자코비안 행렬의 특이값들이 주파수 영역의 값보다 높았으며 라플라스 감쇠상수를 많이 사용한 경우가 가장 높은 특이값을 가지는 것을 볼 수 있다. 특히 이번 실험에서는 후반부의 모델 매개변수에서 특이값들의 경향이 많이 차이가 나는 것을 볼 수 있다. 또한 두 번째로 발생한 국소반올림오차의 발생 시점은 라플라스-푸리에 영역이 주파수 영역보다 상대적으로 안정적이게 나타나는 특징을 볼 수 있다(그림 23).

표 4는 3가지의 초기속도모델을 사용하여 각 영역에서 계산된 헤시안 행렬의 조건수이다. 모든 경우에 대해서 주파수 영역 헤시안 행렬의 조건수가 가장 높게 계산된 것을 확인할 수 있고, 복소주파수를 가장 많이 사용한 그룹4의 조건수가 가장 낮게 계산된 것을 확인할 수 있다.

다음은 라플라스 감쇠상수 간격을 고정하여 최대 라플라스 감쇠상수를 점차 높여가는 실험이다. 앞선 실험과 마찬가지로 총 3가지의 동일한 초기속도모델을 사용하였다. 그림 24는 단조선형 증가모델을 초기속도모델로 사용한 실험 결과이고 각 구간별로

확대하여 그림 25에 도시하였다. 기본적으로 주파수 영역 자코비안 행렬의 특이값보다 라플라스-푸리에 영역 자코비안 행렬의 특이값들 모두 높았지만 이전의 라플라스 감쇠상수를 간격을 조밀하게 사용한 실험보다 라플라스-푸리에 영역의 값들의 차이는 크게 차이가 나지 않는 것을 볼 수 있다. 매우 작은 차이로 최대 라플라스 감쇠상수가 가장 큰 그룹8의 특이값이 높게 계산되었지만, 일부 구간에서만 차이가 벌어진 것을 확인할 수 있다.

이러한 현상은 이어서 실험한 균질한 속도모델과 평활화된 속도모델에서도 똑같이 발생하였다(그림 26, 그림 27, 그림 28, 그림 29). 3가지 속도모델의 공통점으로는 라플라스-푸리에 영역에서 극 초반 모델 매개변수와 첫 번째 국소반올림오차이후에 특이값들의 차이가 존재하는 것이다. 표 5에는 주파수 영역과 라플라스 감쇠상수 간격을 고정시킨 4가지 복소주파수 그룹에 대한 라플라스-푸리에 영역의 헤시안 행렬들의 조건수이다. 비록 특이값들의 분포는 큰 차이가 없었지만, 라플라스 감쇠상수를 가장 많이 사용한 경우(그룹8)의 조건수가 가장 낮은 것을 확인할 수 있다.

총 3가지의 초기속도모델과 2가지의 복소주파수 그룹을 설정하여 실험한 결과, 주파수 영역 파형역산보다 라플라스-푸리에 영역 파형역산이 더욱 안정적이고 모델 매개변수를 표현할 수 있는 유의미한 값들이 많은 것을 확인할 수 있었다. 특히, 복소주파수를 구성할 때, 라플라스 감쇠상수의 간격을 조밀하게 사용하고 최대 라플라스 감쇠상수가 커질수록 그 결과가 향상된다는 것을 알 수 있었다. 이러한 실험 결과는 라플라스 영역에서의 파동경로 분석을 통한 파형역산 전략 연구 내용(Kwon, 2017)을 뒷받침해주는 새로운 분석이라고 보여 진다. 헤시안 행렬의 조건수 또한 라플라스-푸리에 영역이 주파수 영역보다 낮다는 것을 확인할 수 있었는데, 여기서 특이한점은 균질한 속도모델을 초기속도모델로 사용하였을 때 가 모든 영역에서 다른 두 가지의 초기속도모델 실험보다 낮게 계산된 것이다. 행렬의 조건수 또한 시스템의 안정성과 수렴속도를 판단하는 수치 값임에도 불구하고 실제 속도모델과 가장 거리가 먼 균질한 모델의 조건수가 낮게 계산되었다는 것은 아이러니한 실험

결과라고 보여 진다. 다시 말해, 앞선 3.2장의 조건수 설명에서 언급하였듯, 행렬의 조건수만으로 과형역산 시스템을 판단하는 것은 무리가 있다는 것을 다시 한 번 간접적으로 확인하는 실험결과라고 볼 수 있다.

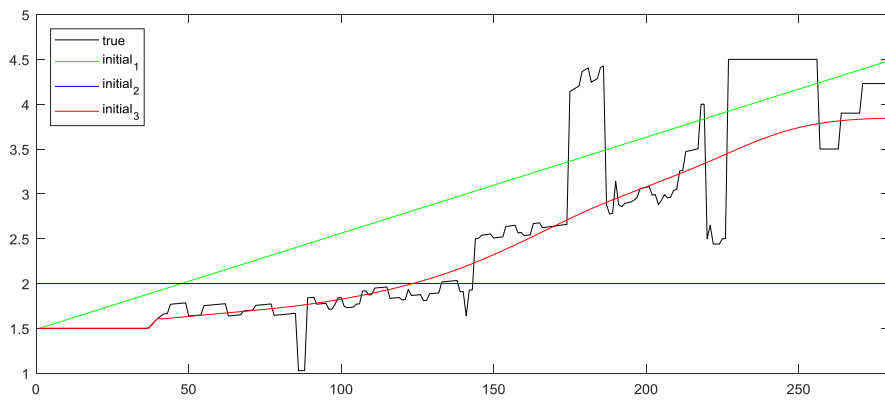


그림 17. Marmousi2 모델 실험에 사용된 3가지의 속도모델

Laplace damping constant group's information of Laplace-Fourier WI				
	Group1	Group2	Group3	Group4
Initial Laplace damping constant	0.0	0.0	0.0	0.0
Last Laplace damping constant	5.05	5.05	5.05	5.05
Interval of Laplace damping constant	0.5	0.25	0.125	0.0625
Number of Laplace damping constants	11	21	41	81

표 2. 라플라스 감쇠상수 그룹(최대 라플라스 감쇠상수는 고정, 단위: s^{-1})

Laplace damping constant group's information of Laplace-Fourier WI				
	Group5	Group6	Group7	Group8
Initial Laplace damping constant	0.0	0.0	0.0	0.0
Last Laplace damping constant	1.125	2.375	4.875	9.875
Interval of Laplace damping constant	0.125	0.125	0.125	0.125
Number of Laplace damping constants	10	20	40	80

표 3. 라플라스 감쇠상수 그룹(라플라스 감쇠상수 간격은 고정, 단위: s^{-1})

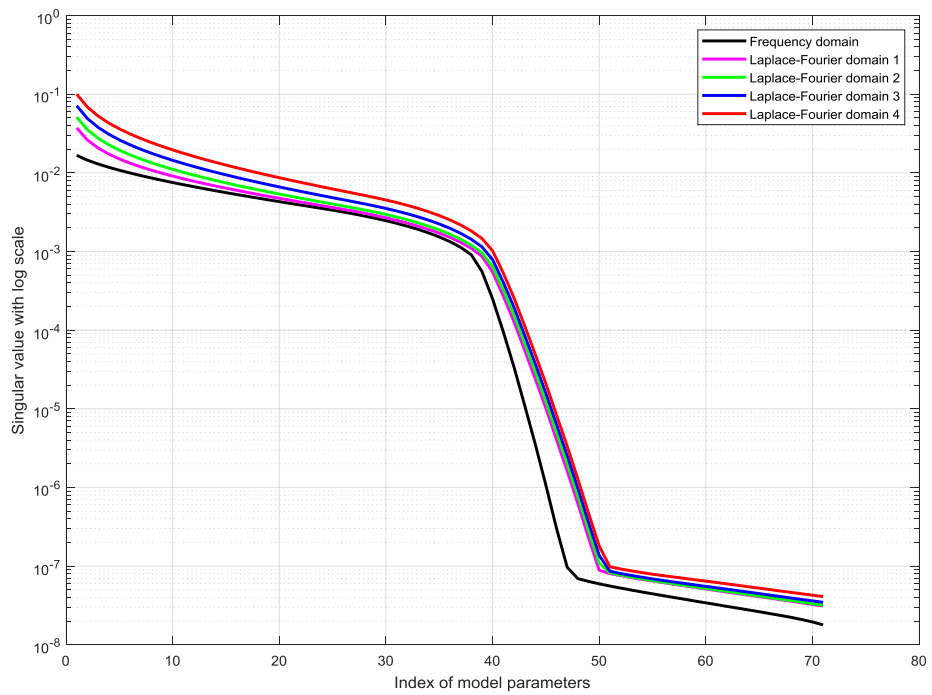


그림 18. 단조선형증가모델을 초기속도모델로 사용한 경우의 주파수 영역과 라플라스-푸리에 영역의 자코비안 행렬의 특이값들 (라플라스 감쇠 상수 그룹1~4)

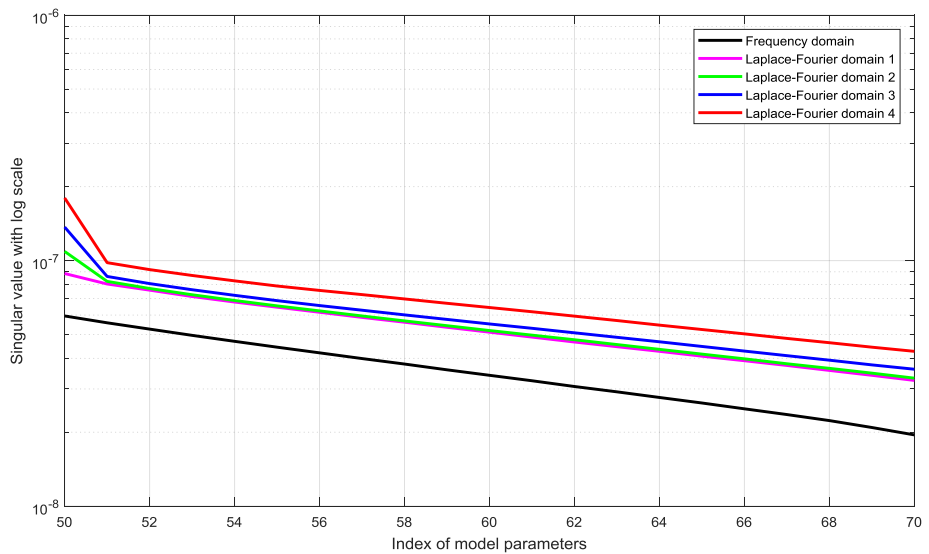
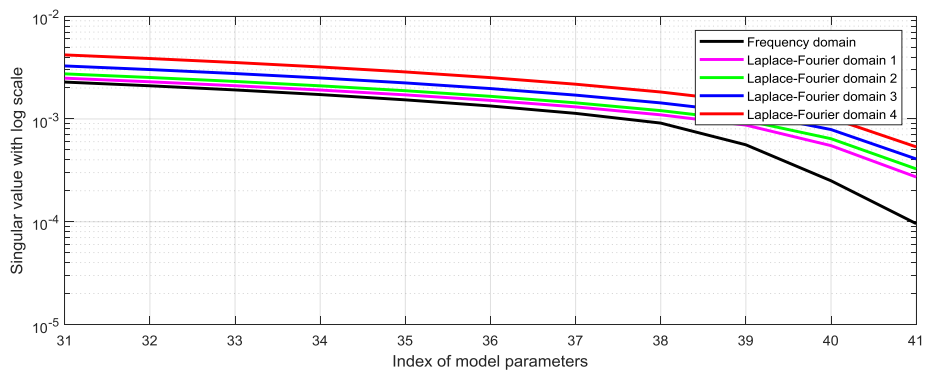
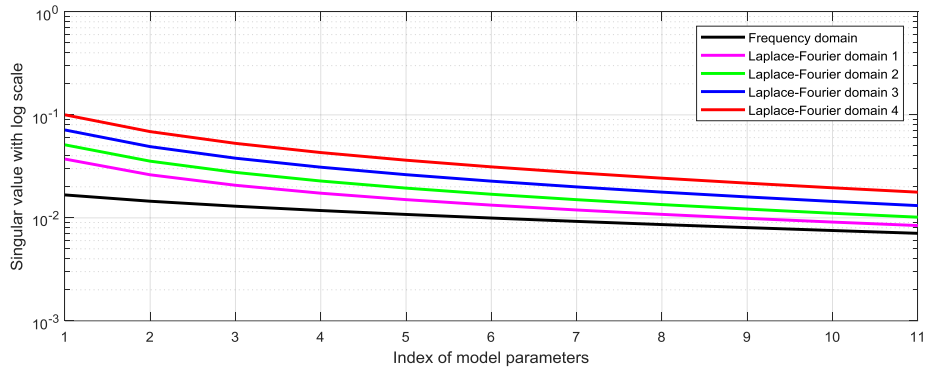


그림 19. 그림 18을 구간별로 확대한 그림

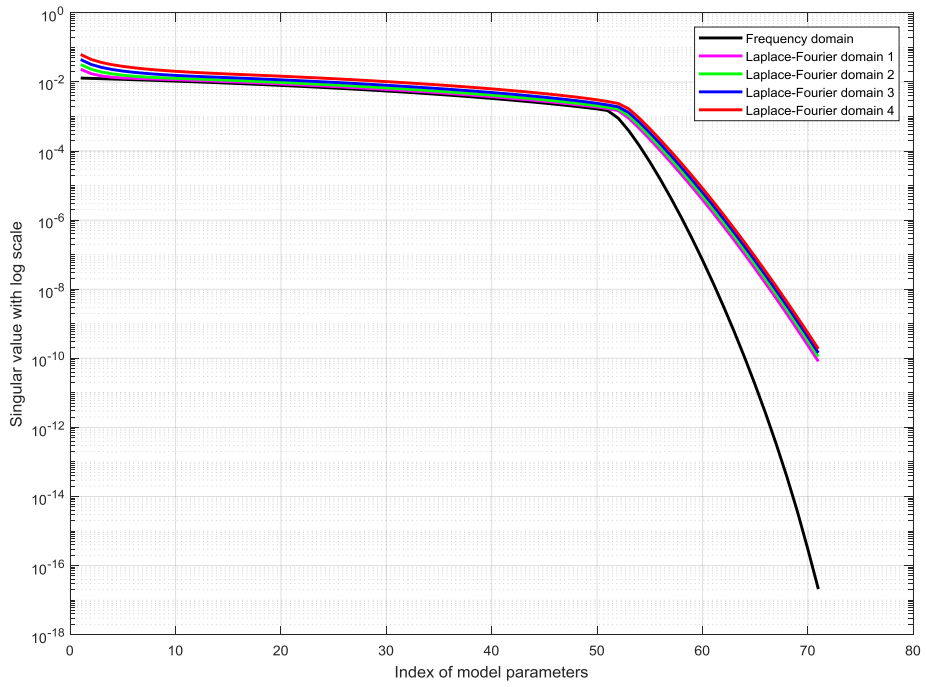


그림 20. 균질한 속도모델을 초기속도모델로 사용한 경우의 주파수 영역과 라플라스-푸리에 영역의 자코비안 행렬의 특이값들 (라플라스 감쇠 상수 그룹1~4)

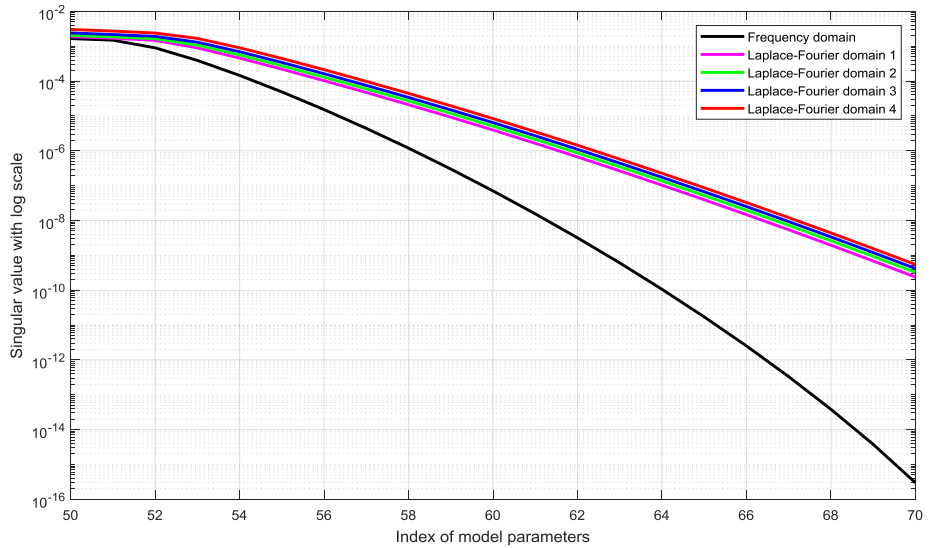
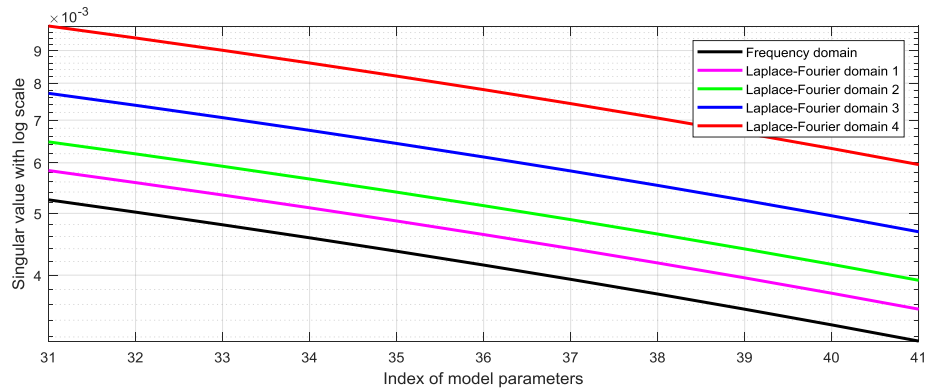
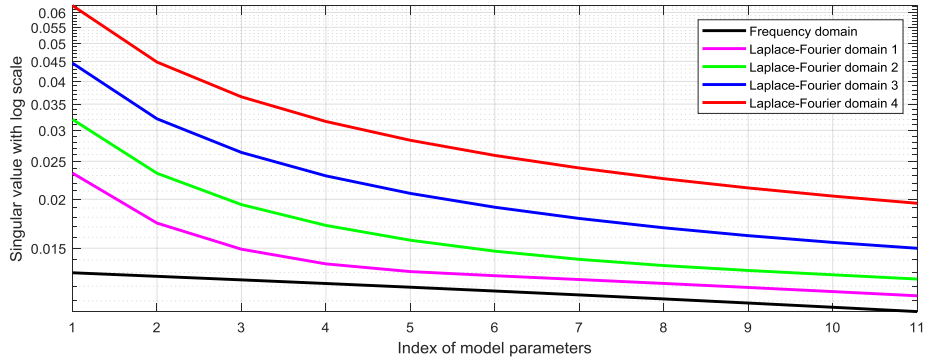


그림 21. 그림 20을 구간별로 확대한 그림

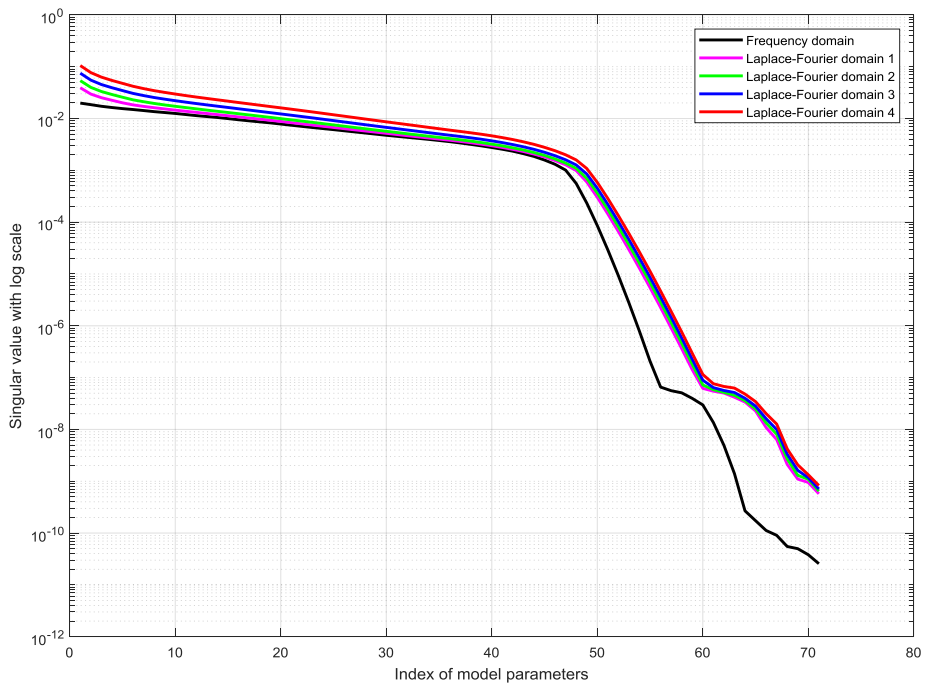


그림 22. 평활화된 속도모델을 초기속도모델로 사용한 경우의 주파수 영역과 라플라스-푸리에 영역의 자코비안 행렬의 특이값들 (라플라스 감쇠 상수 그룹1~4)

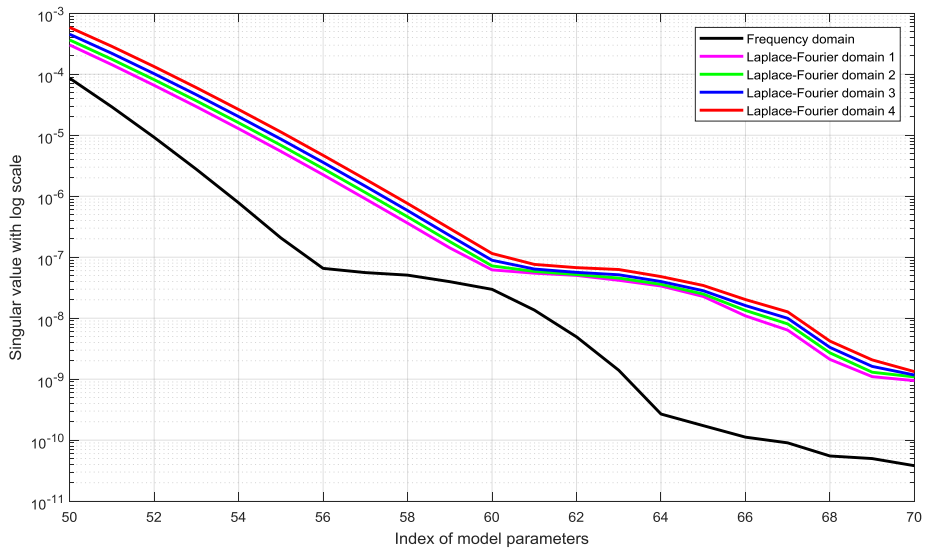
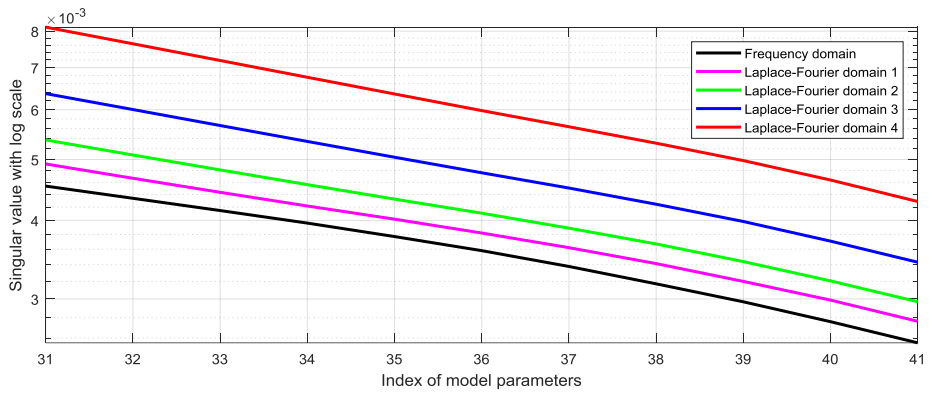
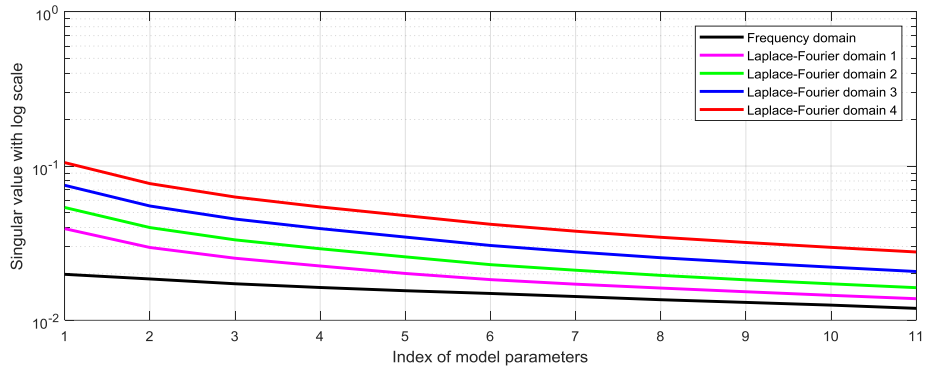


그림 23. 그림 22을 구간별로 확대한 그림

Condition number of each domain's Hessian matrix			
	Linearly increased model	Homogeneous model	Smoothed model
Frequency domain	1.29E+06	3.54E+05	2.17E+06
Laplace-Fourier domain (group1)	1.53E+05	6.28E+04	2.41E+05
Laplace-Fourier domain (group2)	1.15E+05	4.86E+04	1.68E+05
Laplace-Fourier domain (group3)	9.81E+04	4.14E+04	1.36E+05
Laplace-Fourier domain (group4)	9.02E+04	3.80E+04	1.21E+05

표 4. Marmousi 2 모델 실험에서 주파수 영역과 라플라스-푸리에 영역의 헤시안 행렬의 조건수(라플라스 감쇠상수 그룹1~4)

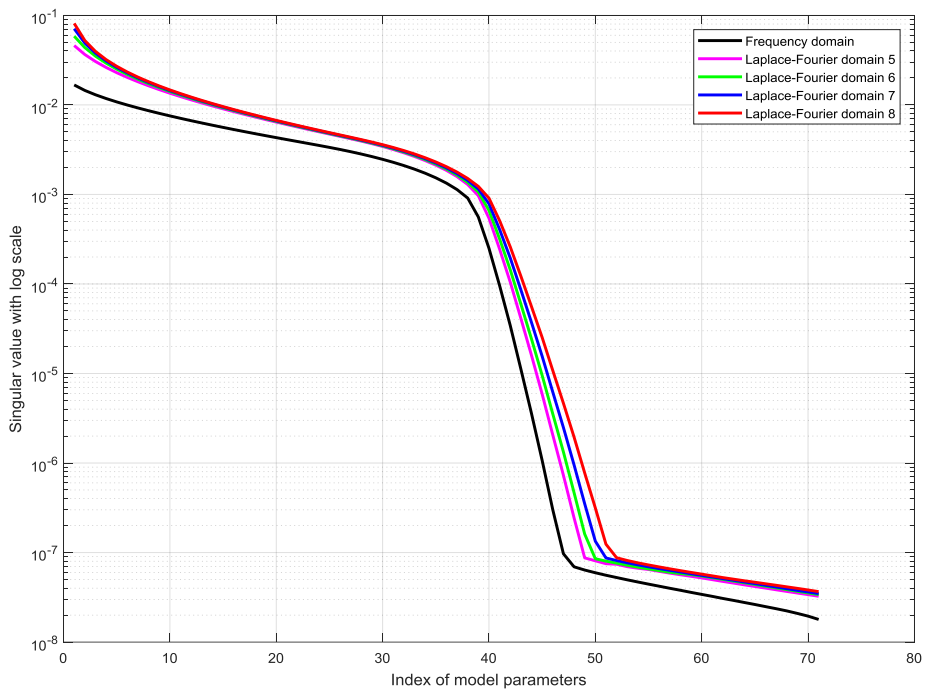


그림 24. 단조선형증가모델을 초기속도모델로 사용한 경우의 주파수 영역과 라플라스-푸리에 영역의 자코비안 행렬의 특이값들 (라플라스 감쇠 상수 그룹5~8)

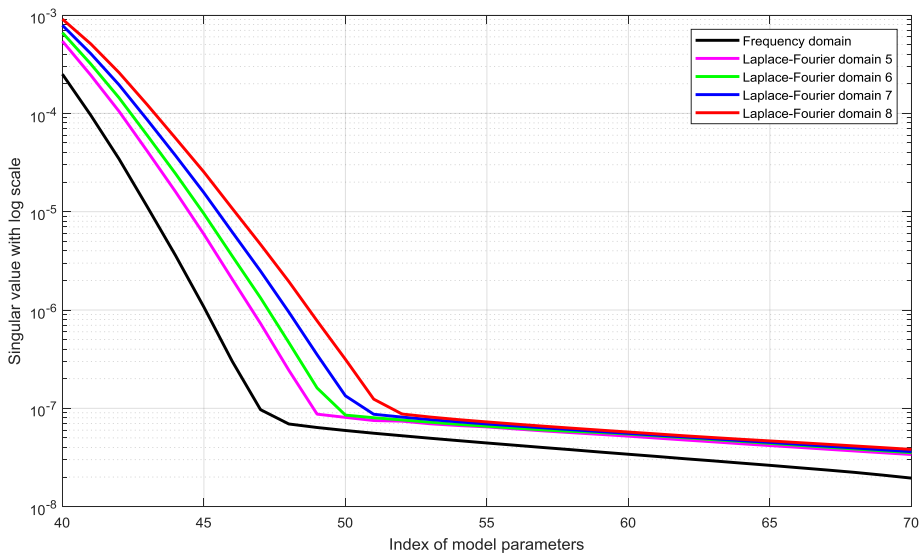
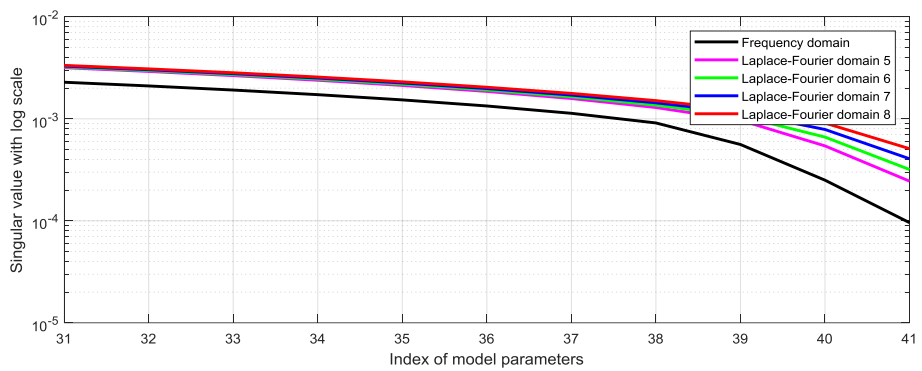
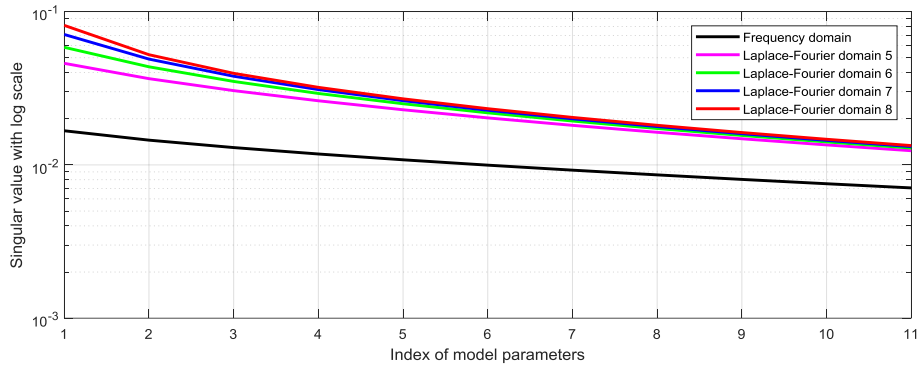


그림 25. 그림 24를 구간별로 확대한 그림

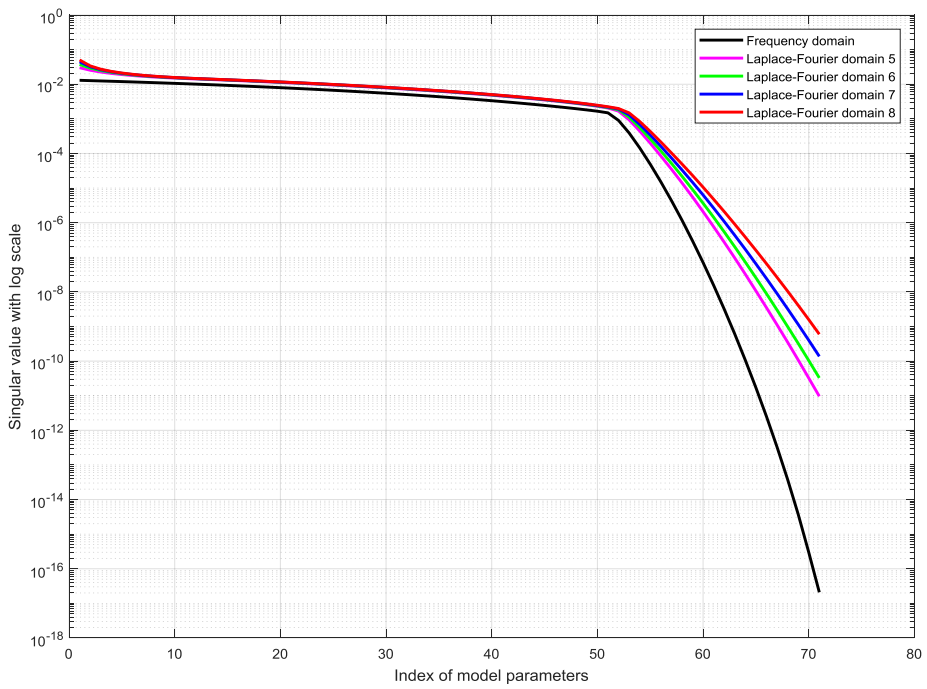


그림 26. 균질한 속도모델을 초기속도모델로 사용한 경우의 주파수 영역과 라플라스-푸리에 영역의 자코비안 행렬의 특이값들 (라플라스 감쇠 상수 그룹5~8)

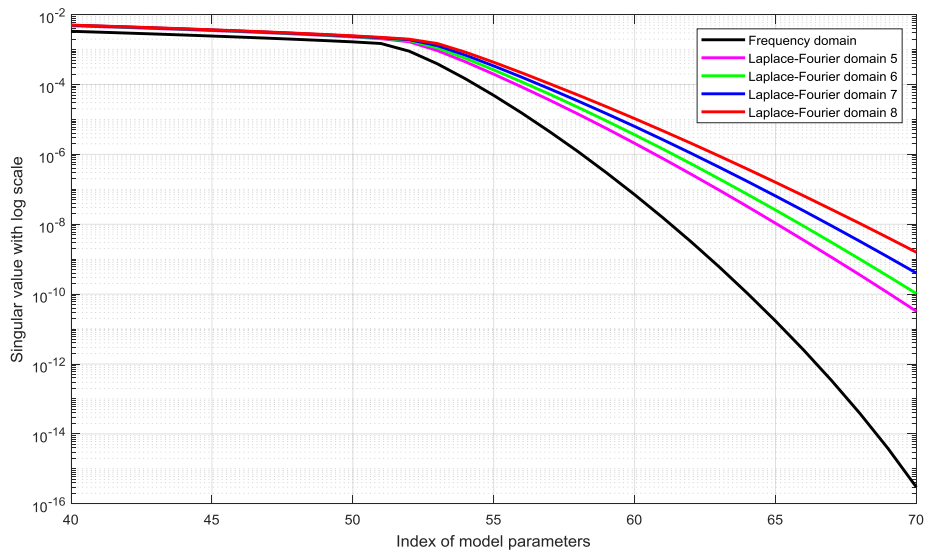
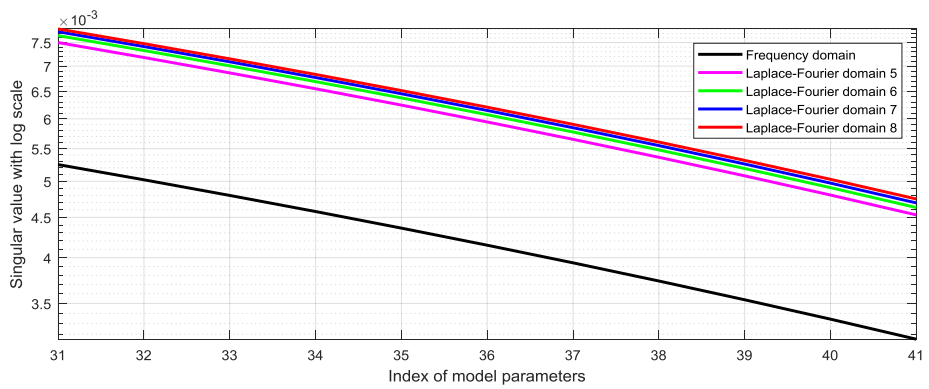
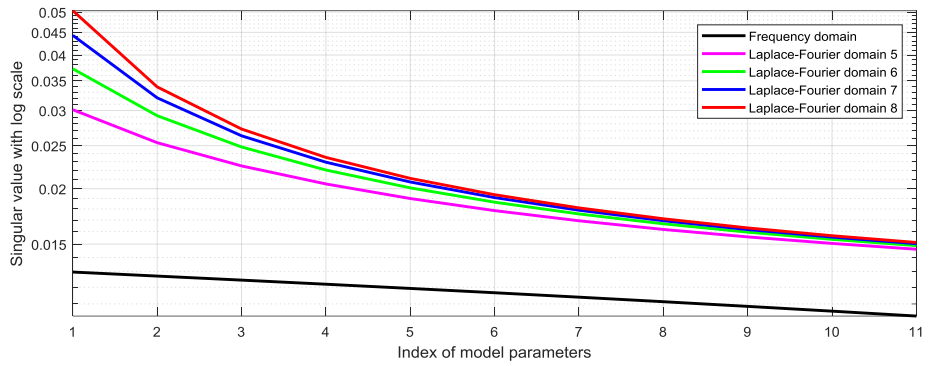


그림 27. 그림 26를 구간별로 확대한 그림

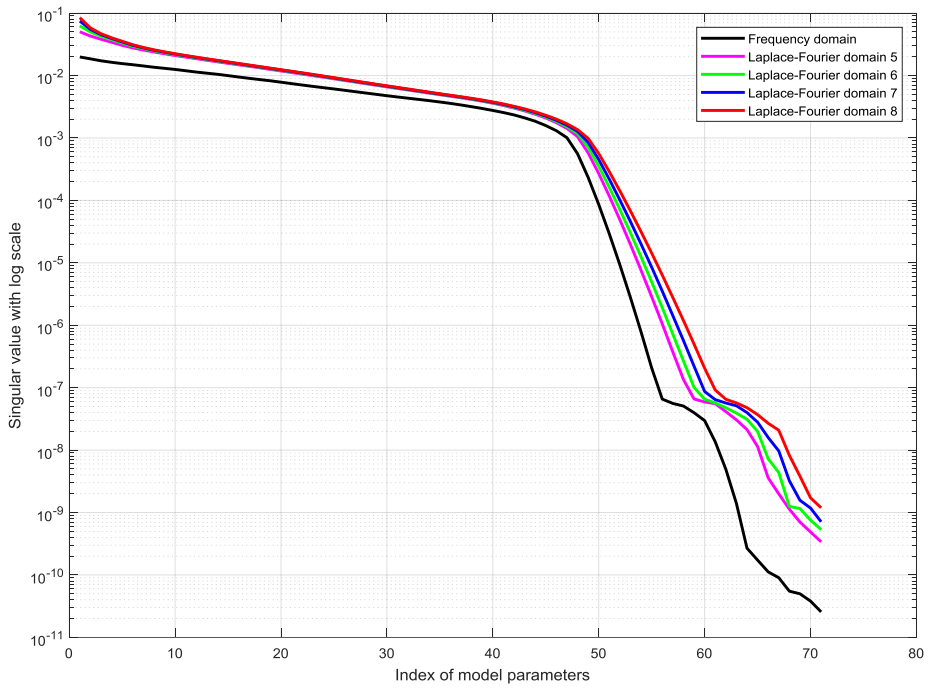


그림 28. 평활화된 속도모델을 초기속도모델로 사용한 경우의 주파수 영역과 라플라스-푸리에 영역의 자코비안 행렬의 특이값들 (라플라스 감쇠 상수 그룹5~8)

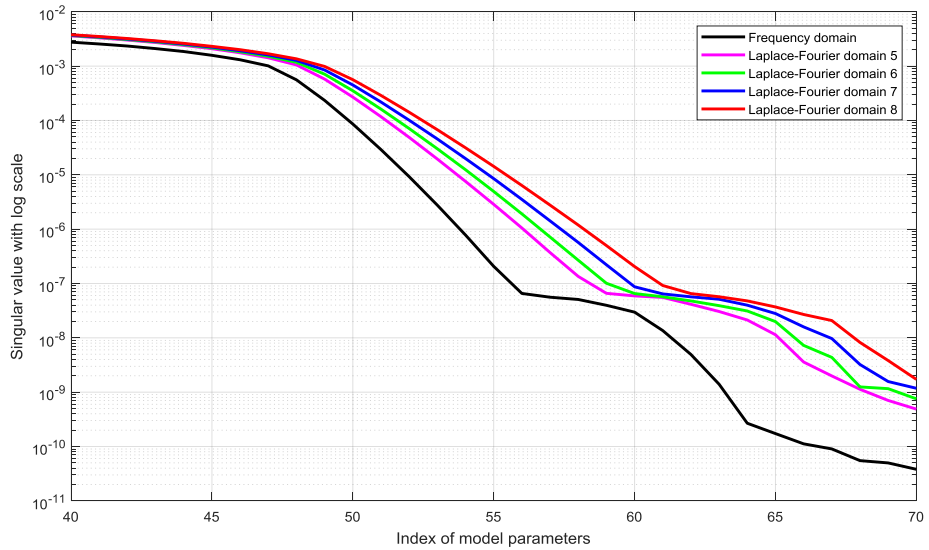
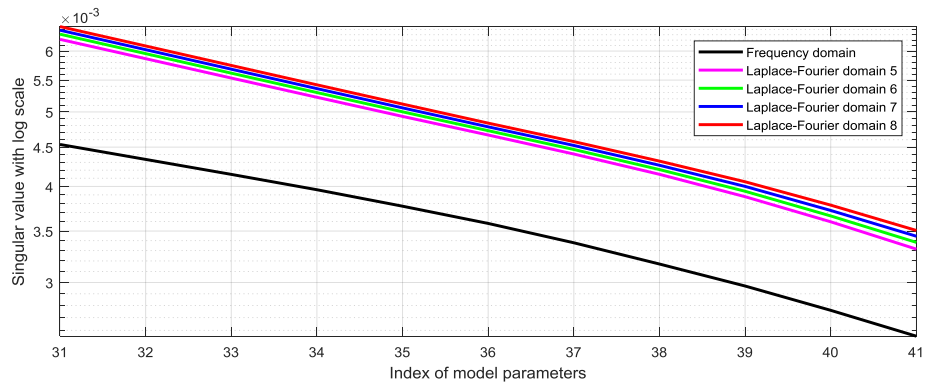
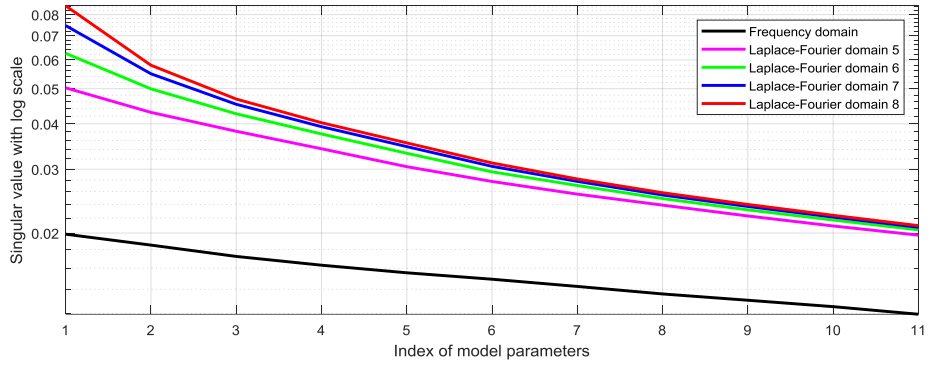


그림 29. 그림 28을 구간별로 확대한 그림

Condition number of each domain's Hessian matrix			
	Linearly increased model	Homogeneous model	Smoothed model
Frequency domain	1.29E+06	3.54E+05	2.17E+06
Laplace-Fourier domain (group5)	3.78E+05	1.18E+05	5.38E+05
Laplace-Fourier domain (group6)	1.99E+05	7.47E+04	2.77E+05
Laplace-Fourier domain (group7)	1.01E+05	4.25E+04	1.40E+05
Laplace-Fourier domain (group8)	5.07E+04	2.27E+04	7.02E+04

표 5. Marmousi 2 모델 실험에서 주파수 영역과 라플라스-푸리에 영역의 헤시안 행렬의 조건수(라플라스 감쇠상수 그룹5~8)

1차원 SEG/EAGE Salt model 수치 실험

두 번째 실험역시 앞선 Marmousi 2 모델 실험과 동일한 주파수와 복소 주파수를 사용하였다. 이번 실험 역시 주파수 영역과 라플라스-푸리에 영역의 자코비안 행렬의 특이값을 계산하였고 모델 매개변수를 71개만 분석하였다. 본 실험에서 사용된 헤시안 행렬의 대각 성분에 추가되는 감쇠상수 혹은 정규화 상수는 0.000008을 사용하였다.

첫 번째 실험은 기존의 주파수 영역과 표 2를 활용한 라플라스-푸리에 영역에 관한 실험이다. 그림 31는 단조선형증가모델을 초기속도모델로 사용한 경우의 주파수 영역과 라플라스-푸리에 영역의 자코비안 행렬의 특이값이다. 자세한 분석을 위해 모델 매개변수를 1~11번, 31~41번, 그리고 40~71번까지 확대하여 그림 32에 다시 도시하였다. 앞선 Marmousi 2 모델 실험과 마찬가지로 주파수 영역 자코비안 행렬의 특이값보다 라플라스-푸리에 영역 자코비안 행렬의 특이값들이 더 큰 것을 확인할 수 있었다. 또한 라플라스 감쇠상수 간격을 가장 조밀하게 사용한 그룹4의 특이값이 가장 크게 계산된 것을 알 수 있다. 주파수 영역과 라플라스-푸리에 영역의 값들은 첫 번째 국소반올림오차(약 24번째 모델 매개변수 지점)가 지난 이후 그 차이가 명확해 졌으며, 두 번째 국소반올림 오차(50번째 모델 매개변수 지점 이후)가 발생한 이후에는 그 차이가 더욱 명확해졌다.

두 번째로 3km/s로 모든 깊이에 따라 동일한 속도모델을 초기속도모델로 사용한 결과이다(그림 33). 실험 결과, 첫 번째 국소반올림오차(약 20번째 모델 매개변수 지점)이전까지 라플라스 감쇠상수를 가장 조밀하게 사용한 라플라스-푸리에 영역을 이어 라플라스 감쇠상수를 넓게 사용할수록 그 특이값들이 낮아지는 것을 확인할 수 있고 모든 라플라스-푸리에 영역 자코비안 행렬의 특이값이 주파수 영역의 값보다 큰 것을 알 수 있다. 기존의 실험들과의 차이점은 그림 34의 마지막 그림에서 후반부의 모델

매개변수중 복소주파수를 가장 많이 사용한 라플라스-푸리에 영역 자코비안 행렬의 특이값이 잠깐 낮아지는 현상을 볼 수 있다. 하지만 무시할 만큼의 매우 작은 값으로 결과에 미치는 영향은 거의 없다고 볼 수 있다.

이어서 암염동으로 인한 급격한 속도 변화를 가장 잘 반영한 평활화된 속도모델을 초기속도모델로 사용한 실험결과이다. 그림 35과 그림 36에서 볼 수 있듯이, 이번 실험 또한 라플라스 감쇠상수를 가장 조밀하게 사용한 라플라스-푸리에 영역 자코비안 행렬의 특이값이 가장 높게 계산되었다. 표 6은 세 가지의 초기 속도모델에 따른 각 영역의 헤시안 행렬의 조건수 또한 비교한 것으로, 모든 조건에서 라플라스-푸리에 영역이 주파수 영역보다 안정적인 것을 확인할 수 있고, 라플라스 감쇠상수 간격을 가장 조밀하게 사용하고 많이 사용한 그룹4의 라플라스-푸리에 영역 파형역산이 성능이 가장 우수한 것을 볼 수 있다.

다음 실험으로는 표 3을 활용하여 라플라스 감쇠상수 간격을 동일하게 두고 복소주파수 그룹을 형성한 라플라스-푸리에 영역과 주파수 영역의 비교이다. 그림 37는 단조선형증가모델을 초기 속도모델로 사용한 경우의 각 영역 자코비안 행렬의 특이값이다. 이번 실험 결과 역시 주파수 영역보다 라플라스-푸리에 영역 자코비안 행렬의 특이값들이 더 높은 것을 알 수 있다. 라플라스-푸리에 영역간의 차이는 앞서 복소주파수 그룹을 표2를 활용한 결과보다 표 3의 라플라스 감쇠상수 그룹을 사용한 것이 그 차이가 더욱 명확해지는 차이점이 발생하였다.

나머지 두 개의 초기속도모델 실험 결과 역시 라플라스-푸리에 영역이 주파수 영역보다 큰 값을 가지는 것을 알 수 있고, 첫 번째 국소반올림오차가 발생한 이후 모든 영역들의 차이가 커지는 것을 알 수 있다(그림 39, 그림 40, 그림 41, 그림 42). 또한 각 영역에서의 헤시안 행렬의 조건수 또한 복소주파수를 가장 많이 사용하는 라플라스-푸리에 영역의 값이 가장 낮게 계산되었다(표 7).

주파수 영역과 라플라스-푸리에 영역의 파형역산 성능 비교를 위해 우리는 1차원 파형역산 실험을 통하여 각 영역의 자코비안 행렬의 특이값과 헤시안 행렬의 조건수를 분석하였다. 실험 결과, 실제 모델이 완만하게 증가하거나, 극단적인 속도차이가 있어도 라플라스-푸리에 영역 자코비안 행렬의 특이값들이 주파수 영역의 값보다 큰 것을 확인할 수 있었다. 앞선 모델 분해 행렬 분석과 마찬가지로 1차원 인공합성자료에 대한 파형역산 실험을 통해서도 라플라스-푸리에 영역이 주파수 영역보다 안정적이고 정확하게 파형역산이 될 수 있음을 확인하였다. 많은 복소주파수를 사용함으로써 라플라스-푸리에 영역은 주파수 영역보다 상대적으로 많은 선형 독립 기저를 가지는 자코비안 행렬들이 많아지게 된다. 즉, 한정된 주파수 관측자료에서 각 모델 부분공간을 라플라스-푸리에 영역이 주파수 영역보다 상대적으로 더욱 많이 생성하게 되는 것이다. 이는 앞선 4.1장에서 수식을 통한 복소주파수 사용에 따른 선형 독립 기저의 증가를 보였듯이, 많은 라플라스 감쇠상수를 사용하는 라플라스-푸리에 영역 파형역산은 기존의 주파수 영역 파형역산에 비해 해당 주파수가 하나의 송신원과 수신기 쌍에서 표현할 수 있는 영역(바나나 커널(banana kernel))에서 더 다양한 파수 성분을 가질 수 있기 때문이다. 이는 곧 송신원과 수신기 쌍에서 표현할 수 있는 영역의 해상도와 직결되는 문제라고 볼 수 있다.

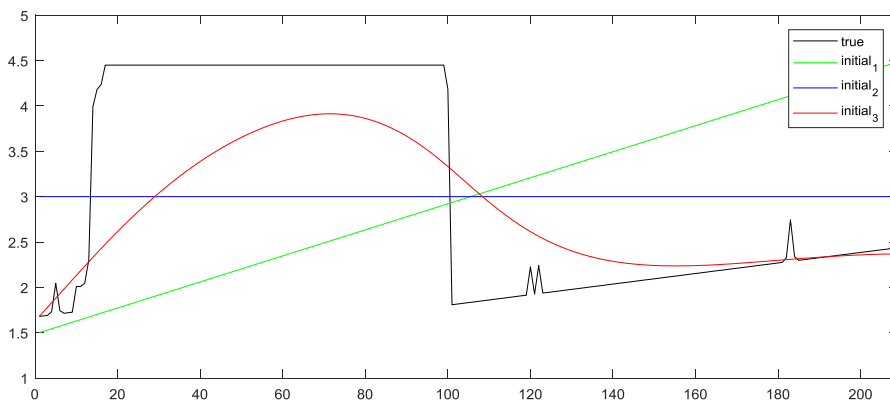


그림 30. SEG/EAGE Salt 실험에 사용된 3가지의 속도모델

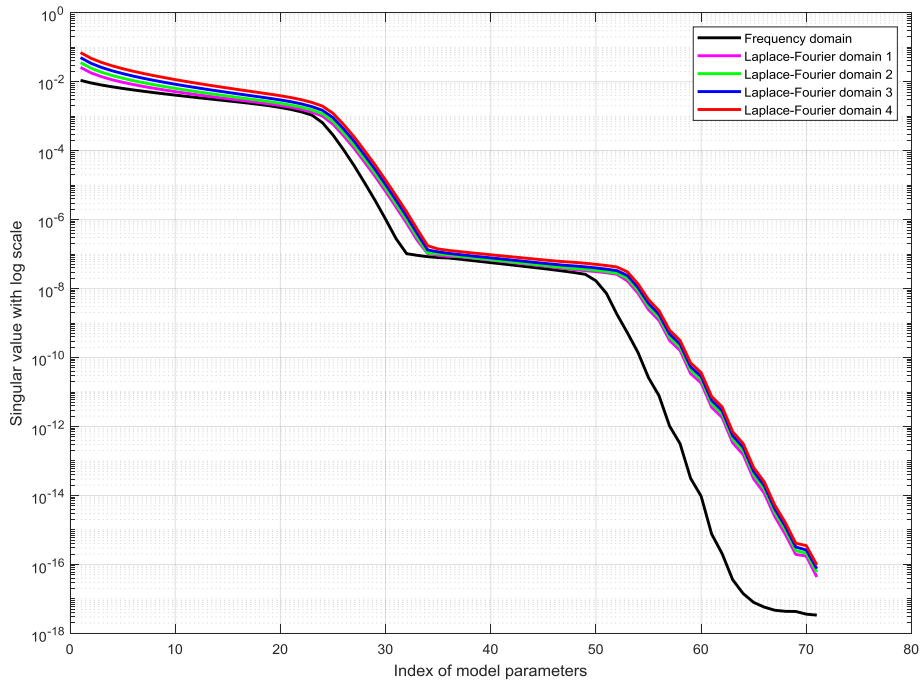


그림 31. 단조선형증가모델을 초기속도모델로 사용한 경우의 주파수 영역과 라플라스-푸리에 영역의 자코비안 행렬의 특이값들 (라플라스 감쇠상수 그룹1~4)

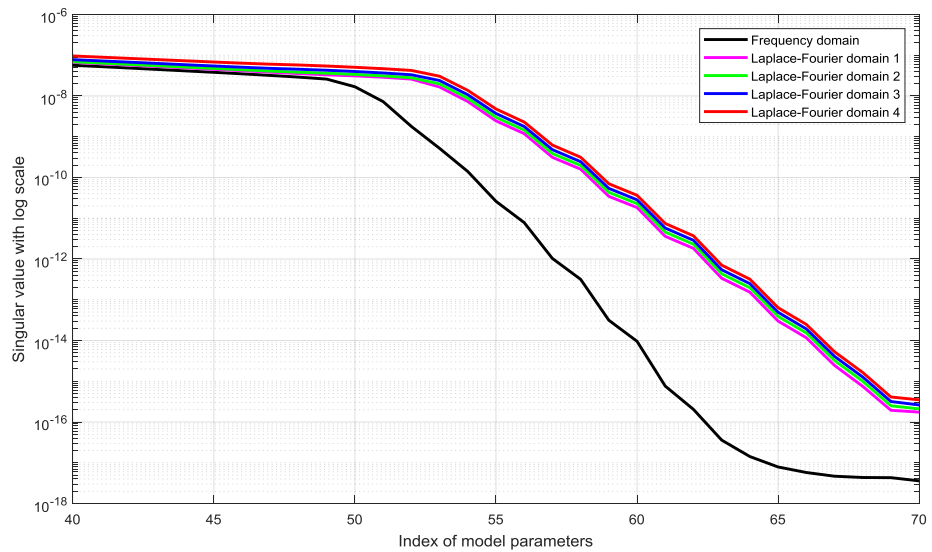
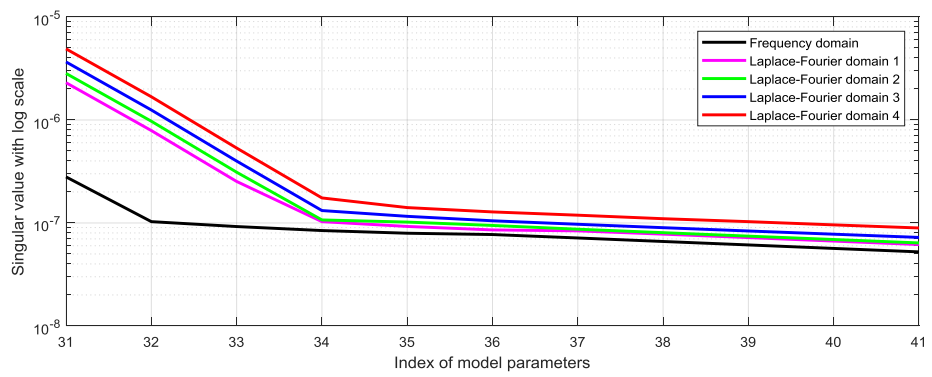
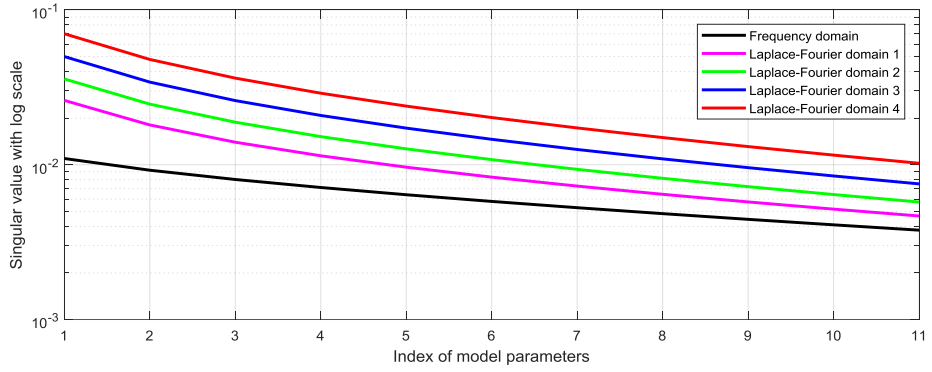


그림 32. 그림 31을 구간별로 확대한 그림

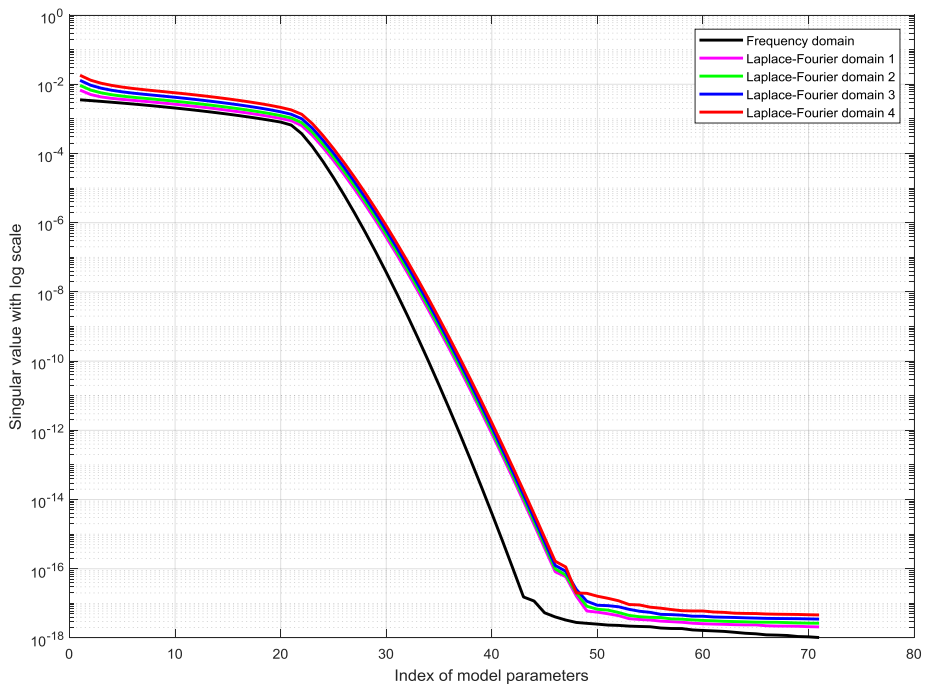


그림 33. 균질한 속도모델을 초기속도모델로 사용한 경우의 주파수 영역과 라플라스-푸리에 영역의 자코비안 행렬의 특이값들 (라플라스 감쇠상수 그룹1~4)

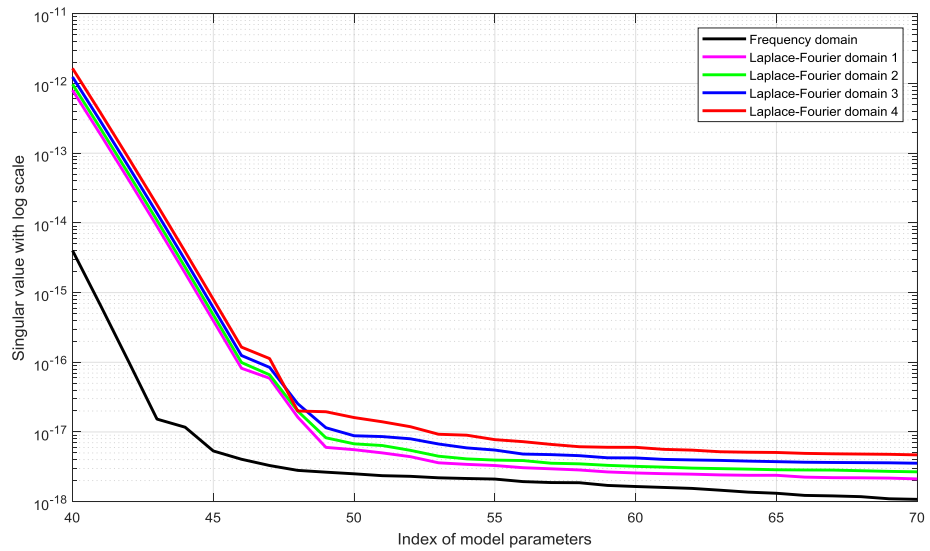
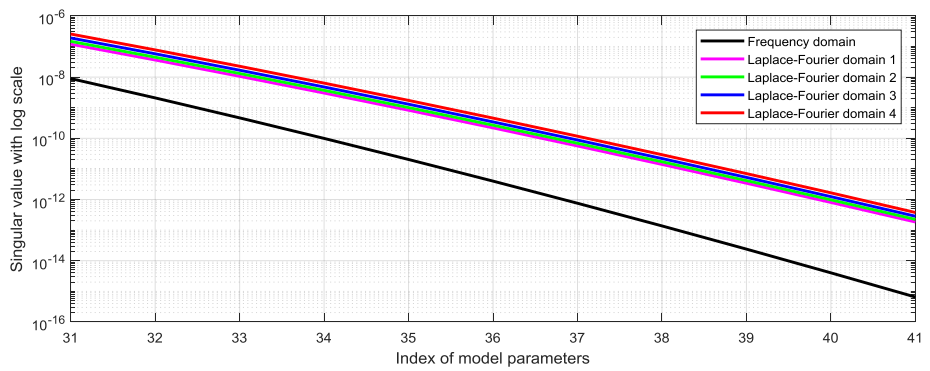
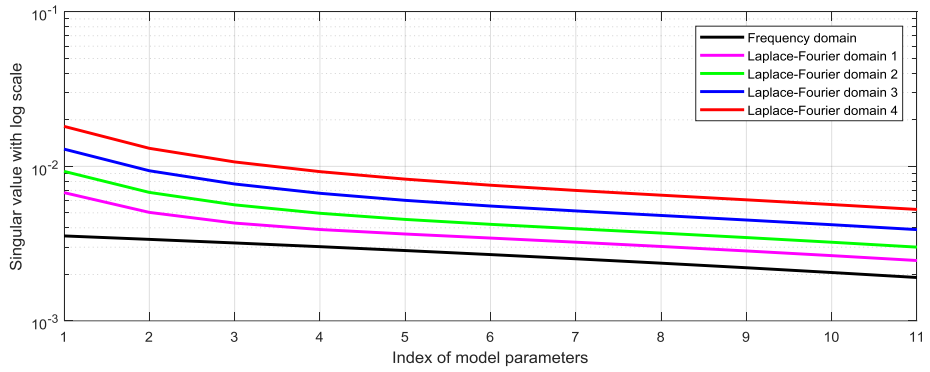


그림 34. 그림 33을 구간별로 확대한 그림

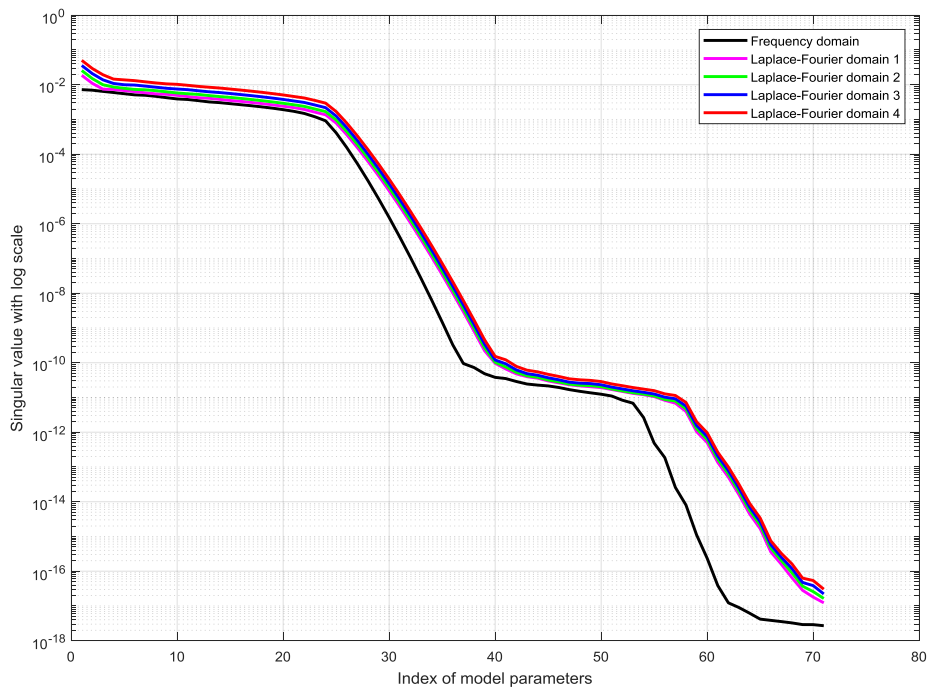


그림 35. 평활화된 속도모델을 초기속도모델로 사용한 경우의 주파수 영역과 라플라스-푸리에 영역의 자코비안 행렬의 특이값들 (라플라스 감쇠상수 그룹1~4)

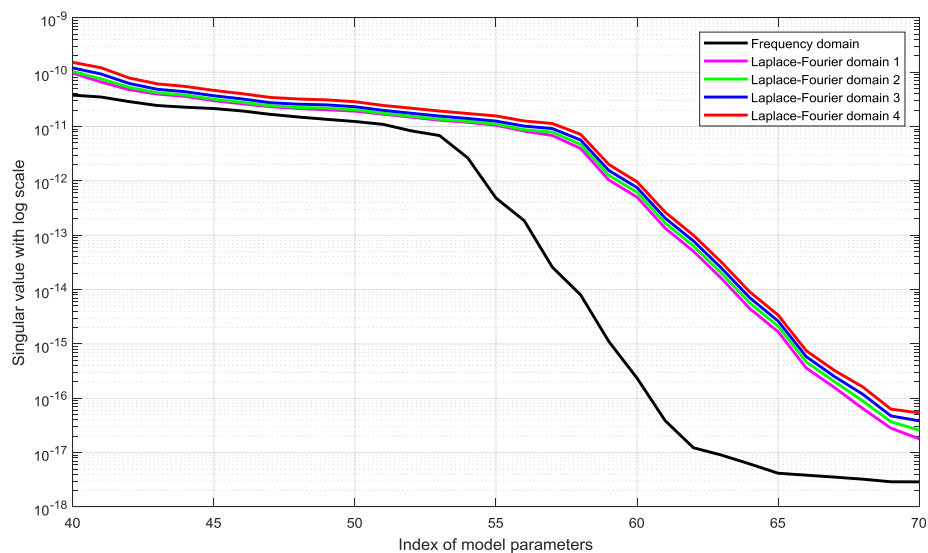
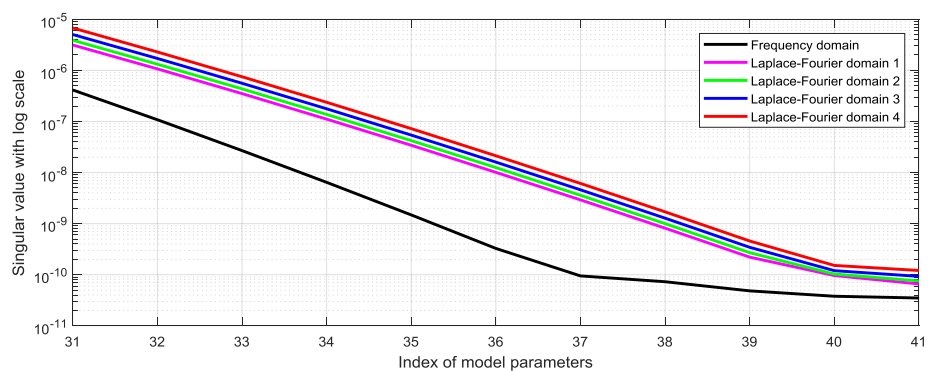
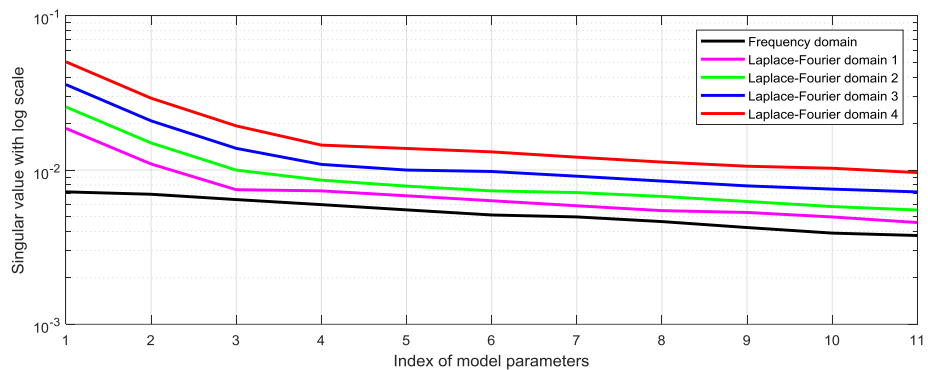


그림 36. 그림 35을 구간별로 확대한 그림

Condition number of each domain's Hessian matrix			
	Linearly increased model	Homogeneous model	Smoothed model
Frequency domain	7.56E+06	8.03E+05	1.61E+06
Laplace-Fourier domain (group1)	1.77E+06	1.65E+05	5.56E+05
Laplace-Fourier domain (group2)	1.51E+06	1.54E+05	5.10E+05
Laplace-Fourier domain (group3)	1.39E+06	1.48E+05	4.89E+05
Laplace-Fourier domain (group4)	1.33E+06	1.45E+05	4.78E+05

표 6. SEG/EAGE Salt 모델 실험에서 주파수 영역과 라플라스-푸리에 영역의 헤시안 행렬의 조건수 (라플라스 감쇠상수 그룹1~4)

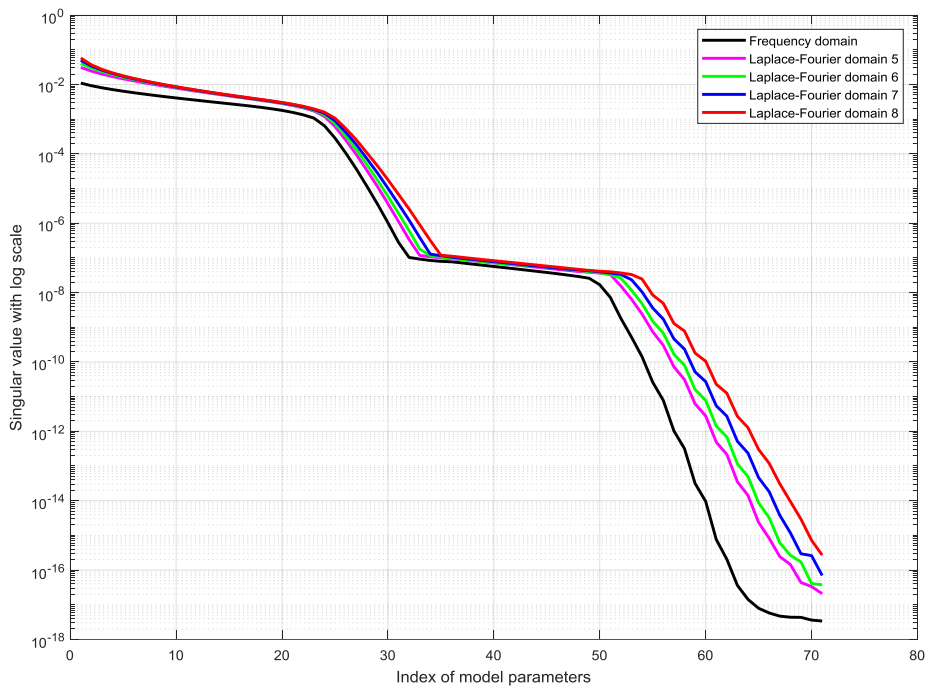


그림 37. 단조선형증가모델을 초기속도모델로 사용한 경우의 주파수 영역과 라플라스-푸리에 영역의 자코비안 행렬의 특이값들 (라플라스 감쇠상수 그룹5~8)

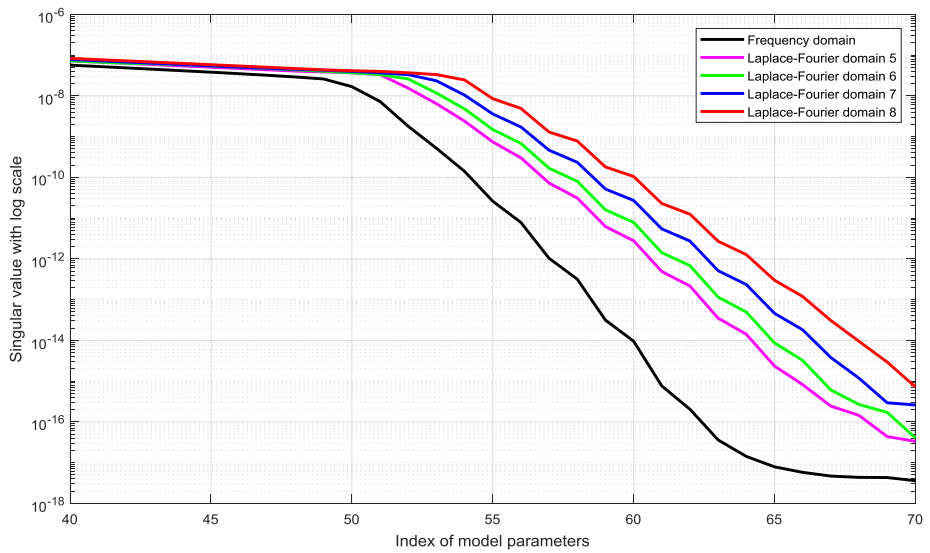
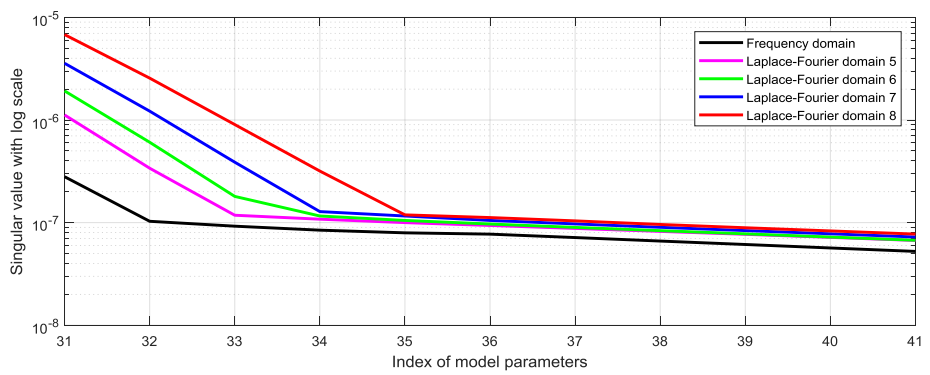
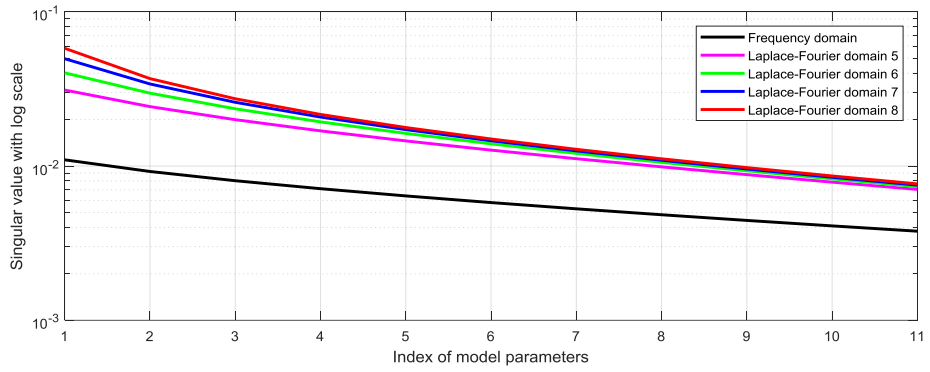


그림 38. 그림 37을 구간별로 확대한 그림

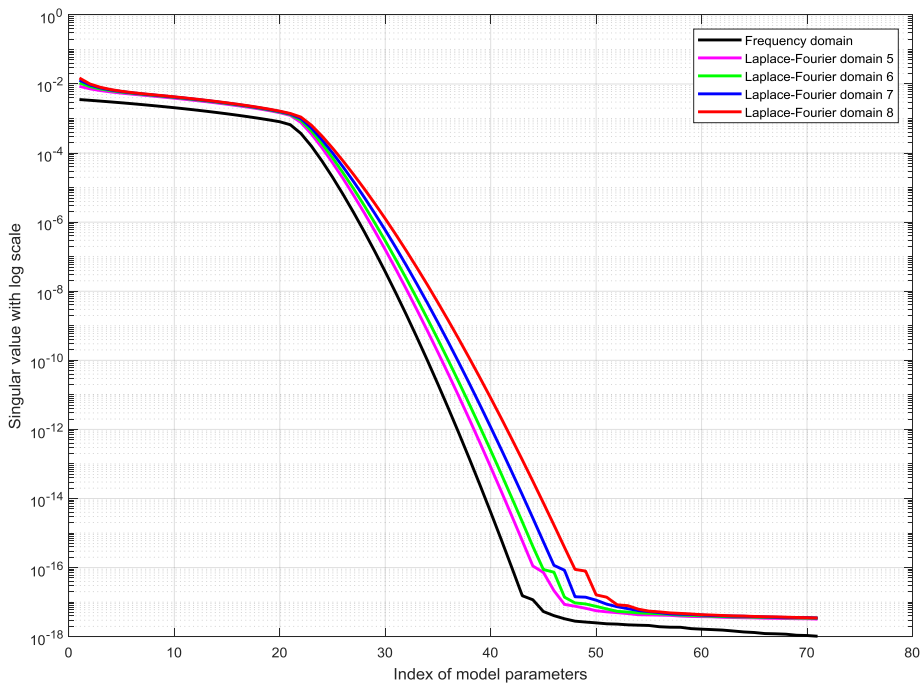


그림 39. 균질한 속도모델을 초기속도모델로 사용한 경우의 주파수 영역과 라플라스-푸리에 영역의 자코비안 행렬의 특이값들 (라플라스 감쇠상수 그룹5~8)

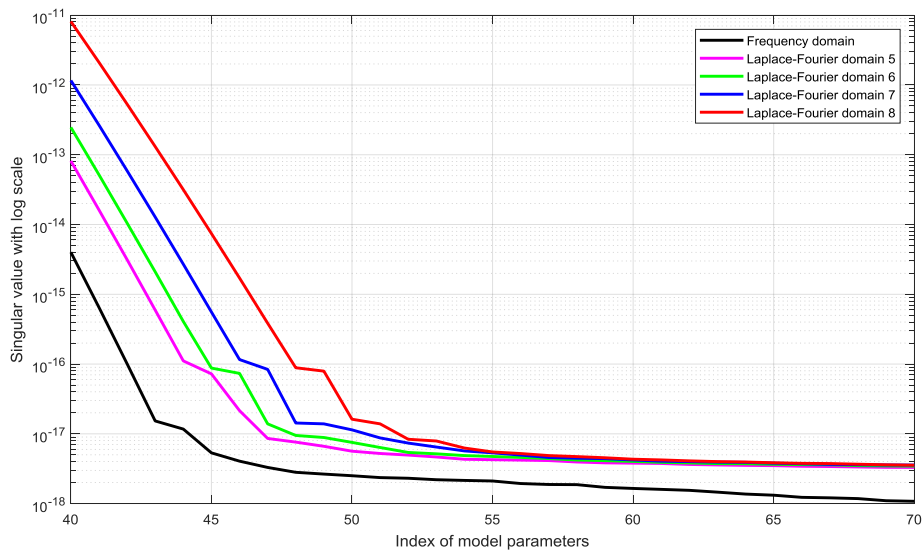
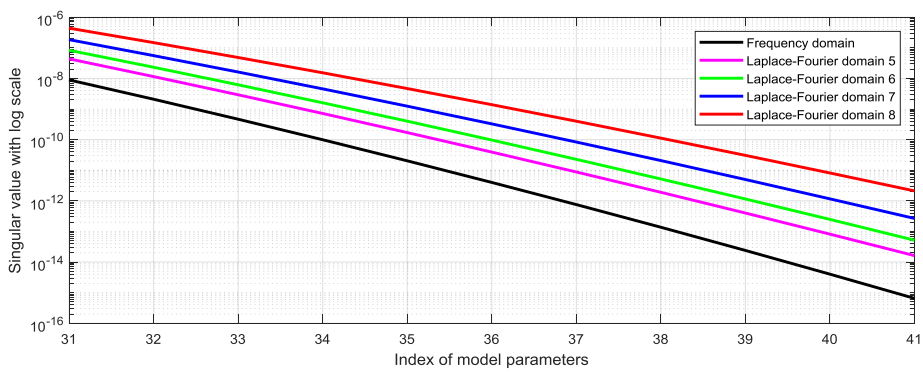
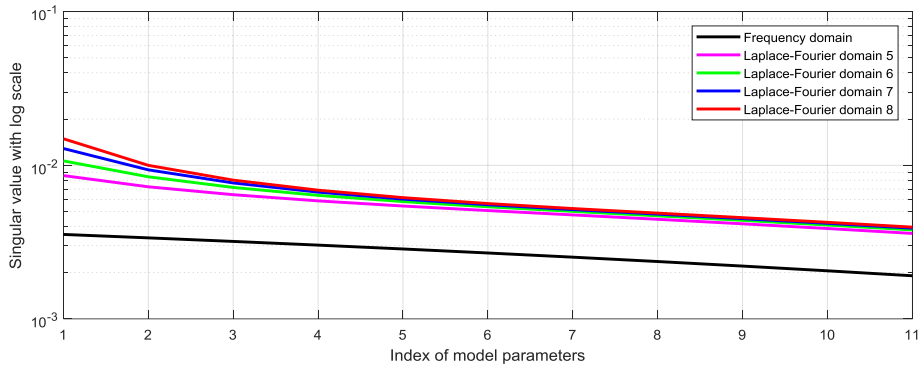


그림 40. 그림 39을 구간별로 확대한 그림

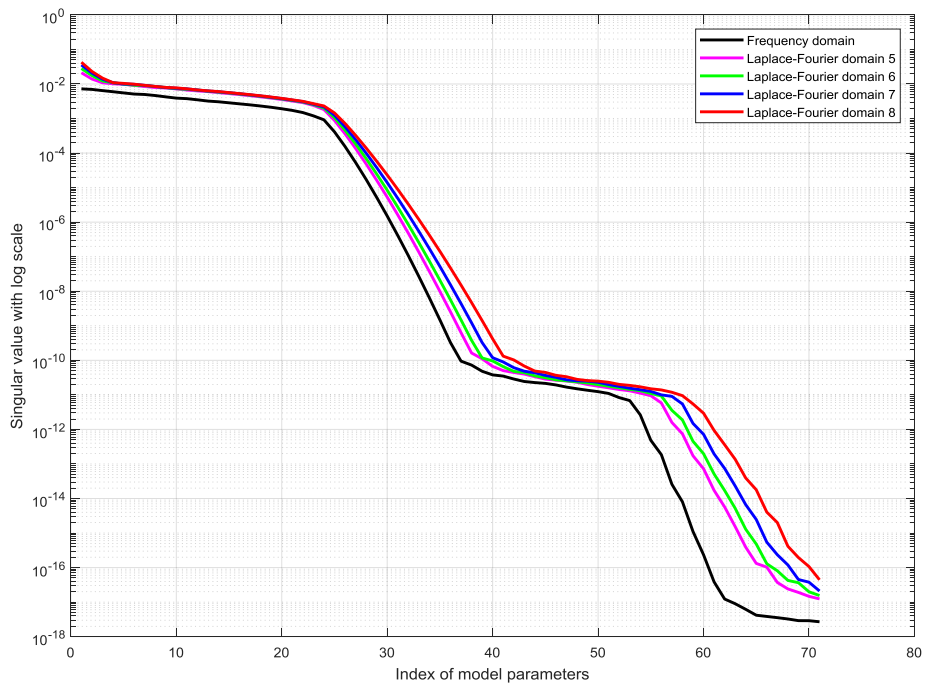


그림 41. 평활화된 속도모델을 초기속도모델로 사용한 경우의 주파수 영역과 라플라스-푸리에 영역의 자코비안 행렬의 특이값들 (라플라스 감쇠상수 그룹5~8)

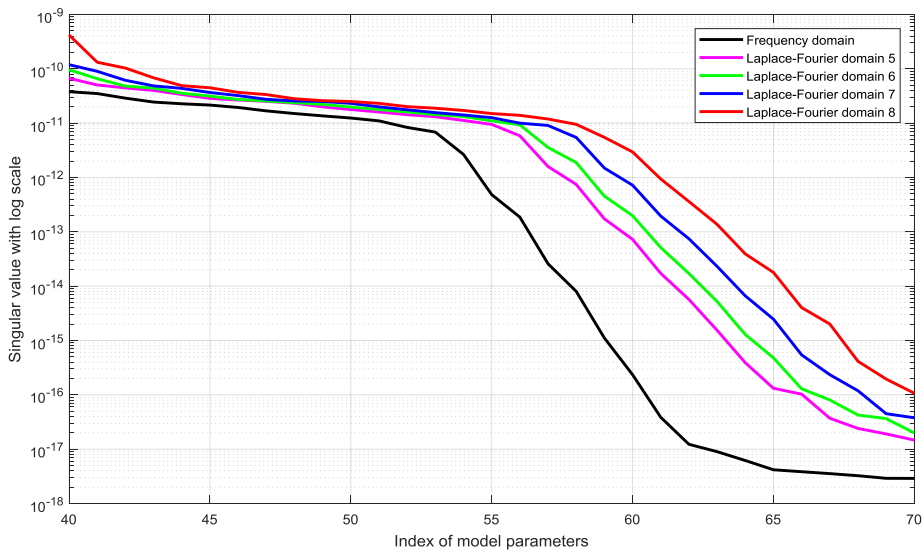
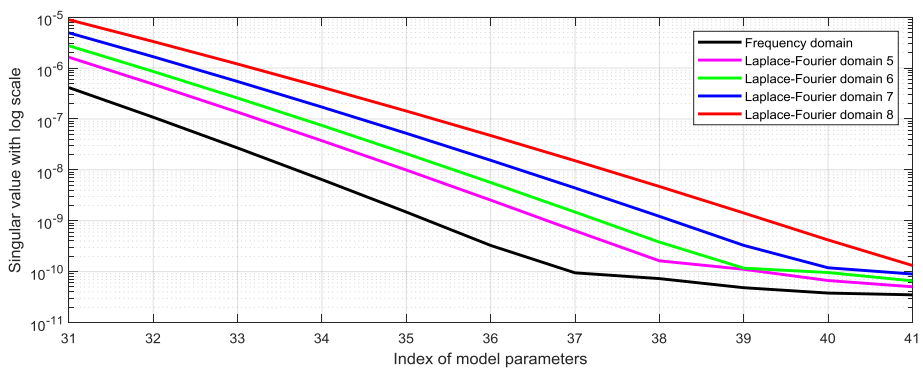
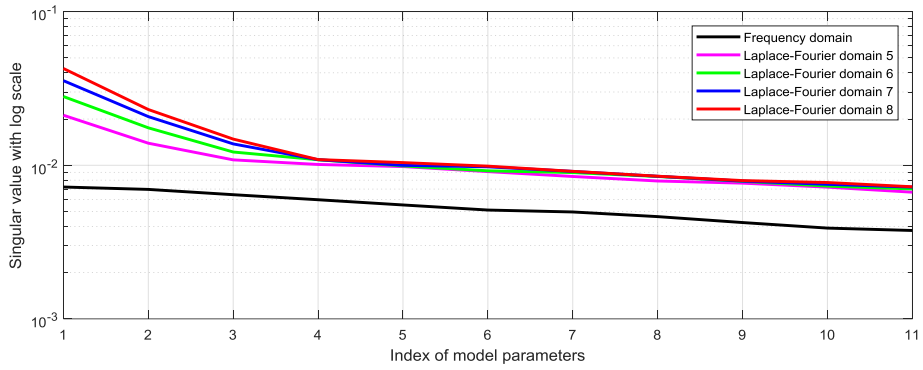


그림 42. 그림 41을 구간별로 확대한 그림

Condition number of each domain's Hessian matrix			
	Linearly increased model	Homogeneous model	Smoothed model
Frequency domain	7.56E+06	8.03E+05	1.61E+06
Laplace-Fourier domain (group5)	4.27E+06	3.61E+05	1.02E+06
Laplace-Fourier domain (group6)	2.61E+06	2.28E+05	7.53E+05
Laplace-Fourier domain (group7)	1.42E+06	1.50E+05	4.97E+05
Laplace-Fourier domain (group8)	7.41E+05	8.77E+04	2.91E+05

표 7. SEG/EAGE Salt 모델 실험에서 주파수 영역과 라플라스-푸리에 영역의 헤시안 행렬의 조건수 (라플라스 감쇠상수 그룹5~8)

2차원 지층 모델 수치 실험

2차원 지층 모델 수치 실험에 사용된 초기속도모델은 총 두 가지를 사용하였다. 첫 번째로 사용한 초기속도모델은 깊이가 깊어짐에 따라 단순하게 속도가 증가하는 단조선형증가모델(그림 43), 두 번째로 사용한 초기속도모델은 모든 깊이에 2km/s로 일정한 균질모델(그림 44)을 사용하였다. 실험에 사용된 공간격자는 50m를 사용하였다. 50m의 공간격자를 사용할 경우, 실험하고자하는 모델은 10×20의 크기가 되며 미지수의 개수는 200개가 된다.

파형역산에 사용된 주파수대역은 3Hz부터 6Hz까지 0.1Hz간격으로 총 31개의 주파수 자료를 사용하였다. 라플라스-푸리에 영역 파형역산의 경우 각 주파수마다 41개의 라플라스 감쇠상수를 적용하였다. 앞선 1차원 실험을 통해 라플라스 감쇠상수의 개수를 많이 사용하고 라플라스 감쇠상수의 간격이 조밀할수록 그 결과가 향상되는 것을 확인했으므로 본 2차원 실험에서는 한가지의 라플라스 감쇠상수 조합을 사용하였다. 라플라스 감쇠상수는 0.0001 s^{-1} 을 시작으로 5.0001 s^{-1} 까지 0.125 s^{-1} 를 간격으로 적용하였다. 앞선 1차원 실험과 달리 2차원 실험은 5개의 송신원과 20개의 수신기(공간격자가 50m이므로)로 구성되어 있기 때문에 각 주파수마다 구성되는 자코비안 행렬의 행의 개수는 100개가 된다. 결과적으로 주파수 영역의 자코비안 행렬의 크기는 3100×100 이 되고 라플라스-푸리에 영역의 자코비안 행렬의 크기는 127100×100 이 된다. 즉, 두 영역 모두 과도하게 결정된 문제(over-determined problems)에 해당된다. 감쇠된 최소 제곱 해에 사용되는 감쇠상수 혹은 정규화 상수는 0.00005를 사용하였다.

그림 45은 단조선형증가 모델을 초기속도모델로 설정한 실험 결과이다. 검은색 선과 초록색 선은 l_2 -norm 목적함수를 사용하였을 때의 주파수 영역과 라플라스-푸리에 영역 자코비안 행렬의 특이값이다. 파란색 선과 빨간색 선은 로그목적함수를 사용하였을 때의 주파수 영역과 라플라스-푸리에 영역 자코비안 행렬의 특이값이다.

1차원 실험과 마찬가지로 2차원 실험에서도 라플라스-푸리에 영역 자코비안 행렬을 구성하는 벡터가 주파수 영역보다 상대적으로 많은 선형 독립 기저로 이루어져있기 때문에 모든 모델 매개변수 지점에서 특이값들이 유의미한 값들로 구성된 것을 확인할 수 있다. 특이값들이 l_2 -norm 목적함수를 사용한 경우보다 로그목적함수를 사용하였을 때 특이값들이 더 작게 계산되는 이유는, 로그목적함수 특성상 수신기에서 기록되는 파동장을 정 전파 모델링을 통해 계산된 수신기 위치의 파동장으로 나누어주기 때문이다.

그림 46은 균질하게 속도가 일정한 모델을 초기속도모델로 설정한 실험결과이다. 앞선 단조선형증가 모델을 사용한 경우와 마찬가지로 각 목적함수에 대하여 주파수 영역보다 라플라스-푸리에 영역 자코비안 행렬의 특이값이 모두 우위에 있는 것을 확인할 수 있다.

두 가지의 초기속도모델에 대하여 두 가지 목적함수에서 계산된 각 영역 헤시안 행렬의 조건수는 표 8에서 확인할 수 있다. 1차원 실험에서는 모든 경우에 대하여 라플라스-푸리에 영역 헤시안 행렬의 조건수가 주파수 영역보다 낮았지만, 2차원 실험에서는 그 예외의 상황도 발생하였다. 로그목적함수를 사용하고 균질모델을 초기속도모델로 사용한 경우에 라플라스-푸리에 영역 헤시안 행렬의 조건수가 주파수 영역보다 높게 측정된것이다. 이런 예외의 결과들을 볼 때 조건수는 해당 시스템의 성능을 결정하기에는 절대적인 지표가 될 수 없음을 다시 한 번 확인할 수 있다.

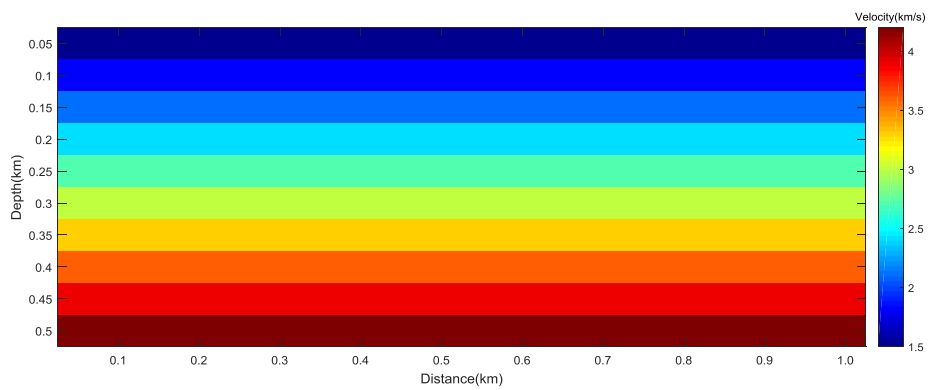


그림 43. 2차원 특이값 분해 실험에 사용된 초기속도모델 (단조선형증가)

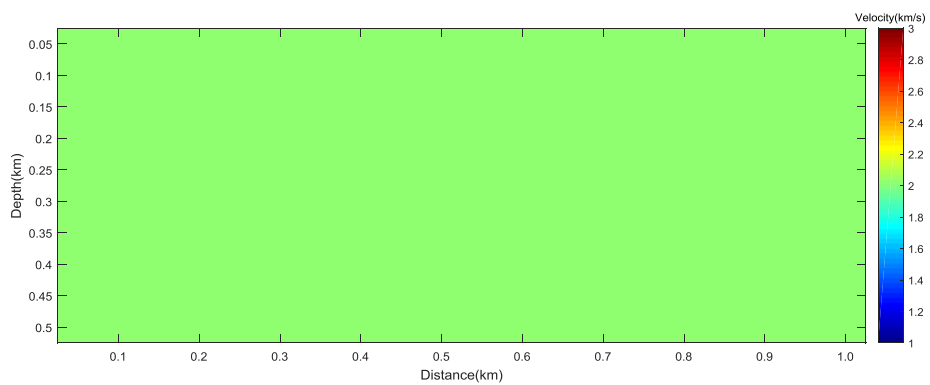


그림 44. 2차원 특이값 분해 실험에 사용된 초기속도모델 (균질모델)

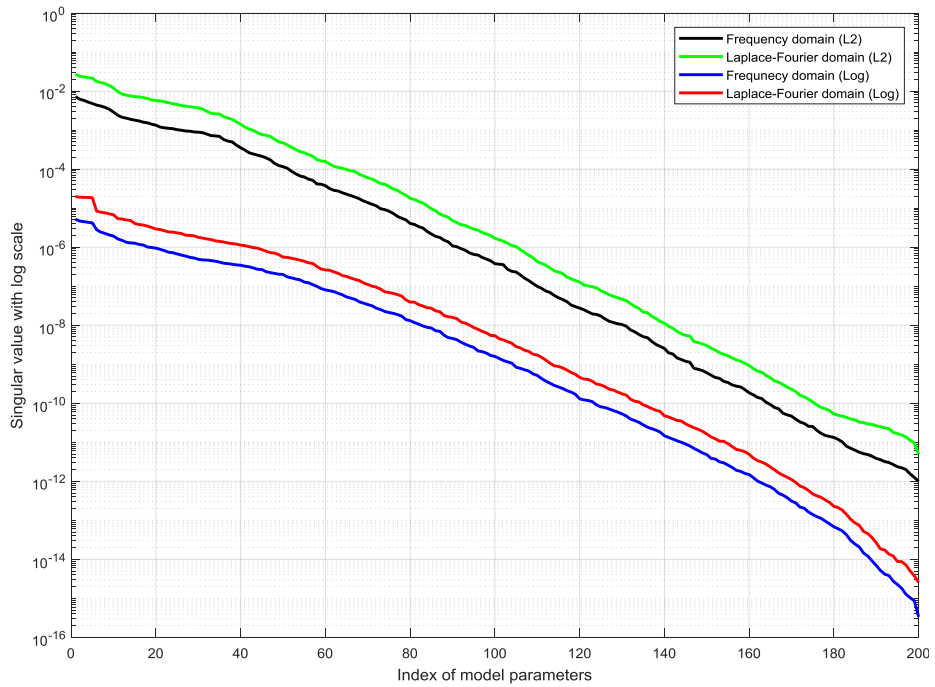


그림 45. 2차원 지층 모델 실험에서 단조선형증가 속도 모델을 초기속도모델로 사용한 경우의 두 가지의 목적함수에 대한 주파수 영역과 라플라스-푸리에 영역의 자코비안 행렬의 특이값들

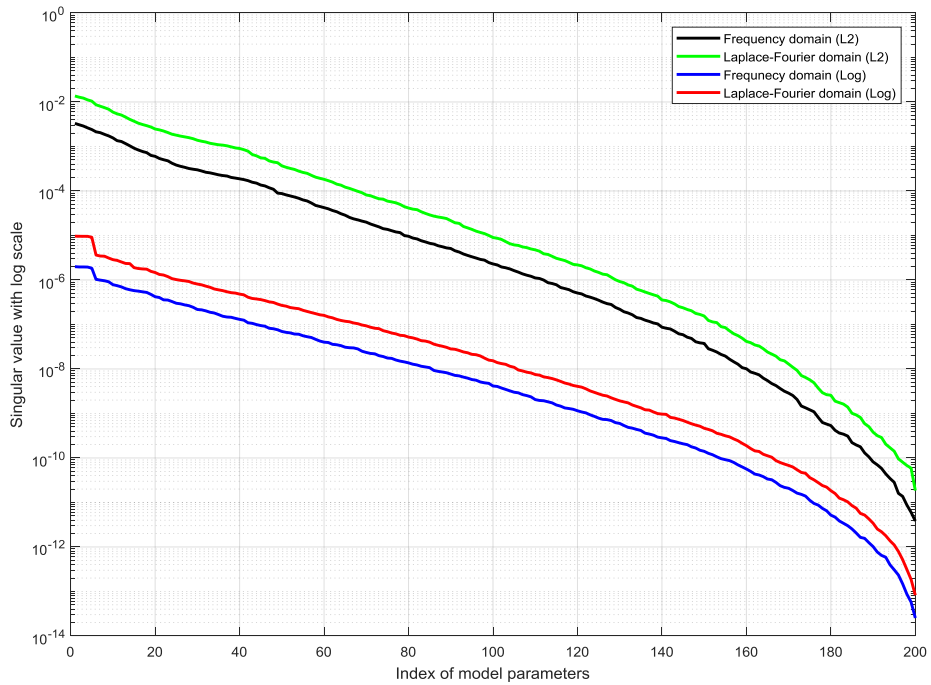


그림 46. 2차원 지층 모델 실험에서 균질한 속도 모델을 초기속도모델로 사용한 경우의 두 가지의 목적함수에 대한 주파수 영역과 라플라스-푸리에 영역의 자코비안 행렬의 특이값들

Condition number of each domain's Hessian matrix		
	Linearly increased model	Homogeneous model
Frequency domain (l2-norm)	5.29E+09	7.44E+07
Laplace-Fourier domain (l2-norm)	3.13E+09	5.40E+07
Frequency domain (logarithmic)	2.42E+10	6.20E+05
Laplace-Fourier domain (logarithmic)	6.02E+09	1.38E+06

표 8. 2차원 지층 모델 실험에서 두 가지의 목적함수에 대한 주파수 영역과 라플라스-푸리에 영역의 헤시안 행렬의 조건수

2차원 비 이상체(anomalies) 모델 수치 실험

2차원 비 이상체 모델 수치 실험에 사용된 초기속도모델은 앞선 지층 모델과 동일한 두 가지의 초기속도모델을 사용하였다. 실험에 사용된 공간격자는 50m를 사용하였다. 이번 실험도 50m의 공간격자를 사용하여, 실험하고자하는 모델은 10×20 의 크기가 되며 미지수의 개수는 200개가 된다.

파형역산에 사용된 주파수대역은 동일하게 3Hz부터 6Hz까지 0.1Hz간격으로 총 31개의 주파수 자료를 사용하였다. 라플라스-푸리에 영역 파형역산의 경우도 각 주파수마다 앞선 실험과 동일하게 41개의 라플라스 감쇠상수를 적용하였다. 결과적으로 비 이상체 모델에 대한 실험에서도 주파수 영역의 자코비안 행렬의 크기는 3100×100 이 되고 라플라스-푸리에 영역의 자코비안 행렬의 크기는 127100×100 이 된다. 즉, 두 영역 모두 과도하게 결정된 문제(over-determined problems)에 해당된다. 감쇠된 최소 제곱 해에 사용되는 감쇠상수 혹은 정규화 상수는 0.00008을 사용하였다.

그림 47은 단조선형증가 모델을 초기속도모델로 설정한 실험 결과이다. 검은색 선과 초록색 선은 l_2 -norm 목적함수를 사용하였을 때의 주파수 영역과 라플라스-푸리에 영역 자코비안 행렬의 특이값이다. 파란색 선과 빨간색 선은 로그목적함수를 사용하였을 때의 주파수 영역과 라플라스-푸리에 영역 자코비안 행렬의 특이값이다. 본 실험에서도 라플라스-푸리에 영역 자코비안 행렬을 구성하는 벡터가 주파수 영역보다 상대적으로 많은 선형 독립 기저로 이루어져있기 때문에 모든 모델 매개변수 지점에서 특이값들이 유의미한 값들로 구성된 것을 알 수 있었다.

그림 48은 균질하게 속도가 일정한 모델을 초기속도모델로 설정한 실험결과이다. 앞선 단조선형증가 모델을 사용한 경우와 마찬가지로 각 목적함수에 대하여 주파수 영역보다 라플라스-푸리에 영역 자코비안 행렬의 특이값이 모두 우위에 있는 것을 확인할 수

있다.

두 가지의 초기속도모델에 대하여 두 가지 목적함수에서 계산된 각 영역 헤시안 행렬의 조건수는 표 9에서 확인할 수 있다. 이번 실험에서도 로그목적함수를 사용하고 균질모델을 초기속도모델로 사용한 경우에 라플라스-푸리에 영역 헤시안 행렬의 조건수가 주파수 영역보다 높게 계산되었다.

2차원 인공합성자료 실험에서도 우리는 라플라스-푸리에 영역 자코비안 행렬의 특이값이 주파수 영역의 값보다 더 유의미한 값들을 가지는 것을 확인했다. 비록 1차원의 실험과는 달리 모델 매개변수의 깊이에 따른 자코비안 행렬의 특이값을 파악할 수는 없지만, 모든 모델 매개변수에서 라플라스-푸리에 영역 자코비안 행렬의 특이값이 주파수 영역보다 더 유의미한 값을 가지는 것은 1차원실험과 동일하였다. 2차원 실험에서는 특히 목적함수를 다르게 사용하여 비교 실험하였는데, 실험결과 동일한 목적함수를 사용하는 경우에서 라플라스-푸리에 영역이 주파수 영역보다 유의미한 값들로 자코비안 행렬이 구성되는 것을 알 수 있었다.

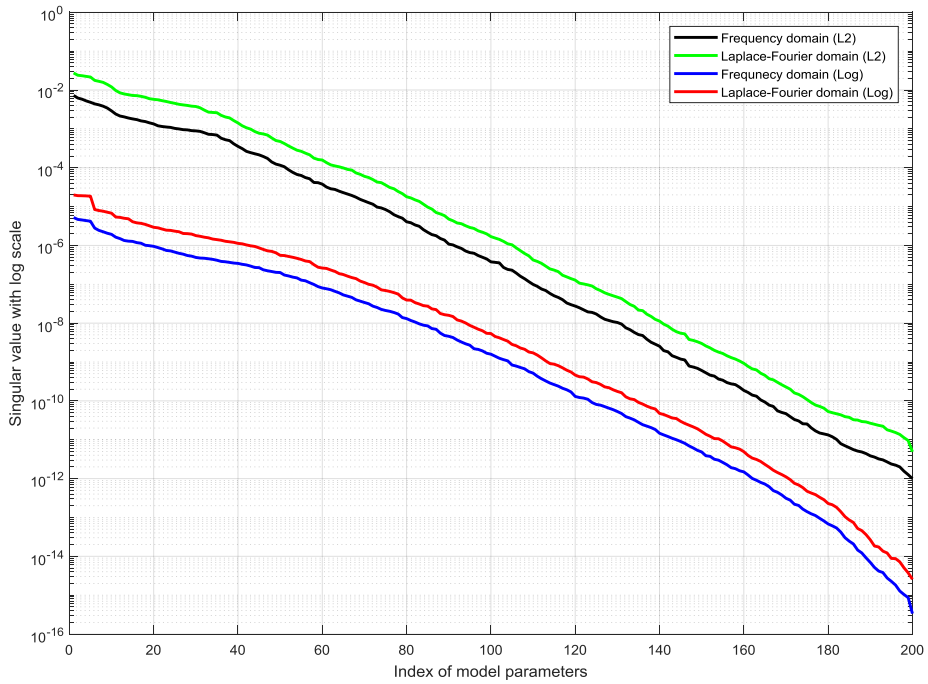


그림 47. 2차원 비 이상체 모델 실험에서 단조선형증가 속도 모델을 초기속도모델로 사용한 경우의 두 가지의 목적함수에 대한 주파수 영역과 라플라스-푸리에 영역의 자코비안 행렬의 특이값들

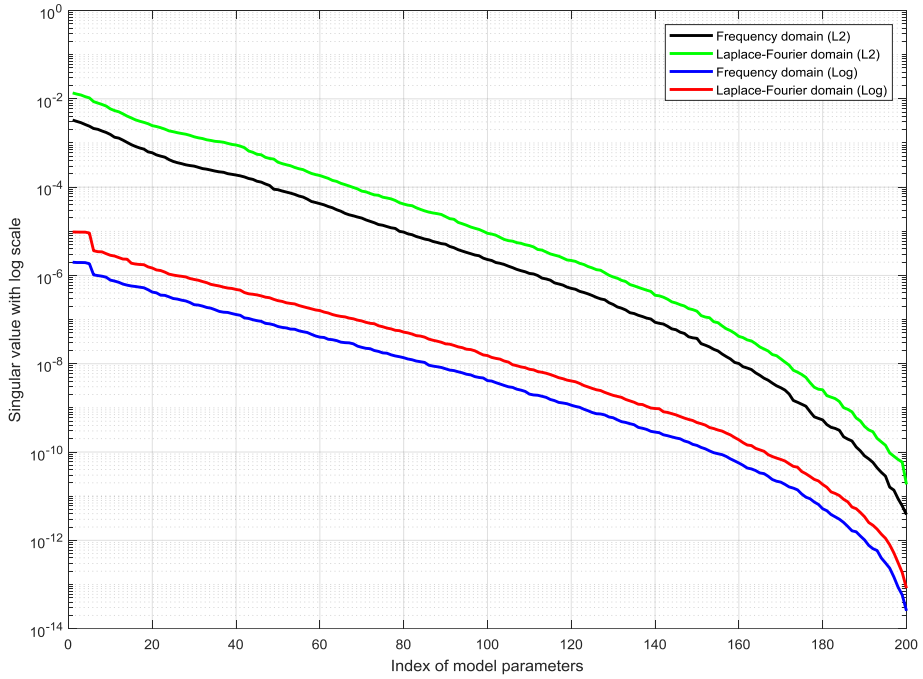


그림 48. 2차원 비 이상체 모델 실험에서 균질한 속도 모델을 초기속도모델로 사용한 경우의 두 가지의 목적함수에 대한 주파수 영역과 라플라스-푸리에 영역의 자코비안 행렬의 특이값들

Condition number of each domain's Hessian matrix		
	Linearly increased model	Homogeneous model
Frequency domain (l2-norm)	5.12E+09	5.24E+06
Laplace-Fourier domain (l2-norm)	4.31E+09	4.87E+06
Frequency domain (logarithmic)	5.24E+09	5.60E+04
Laplace-Fourier domain (logarithmic)	8.74E+08	1.03E+05

표 9. 2차원 비 이상체 모델 실험에서 두 가지의 목적함수에 대한 주파수 영역과 라플라스-푸리에 영역의 헤시안 행렬의 조건수

4.3 2차원 인공합성자료 파형역산 결과

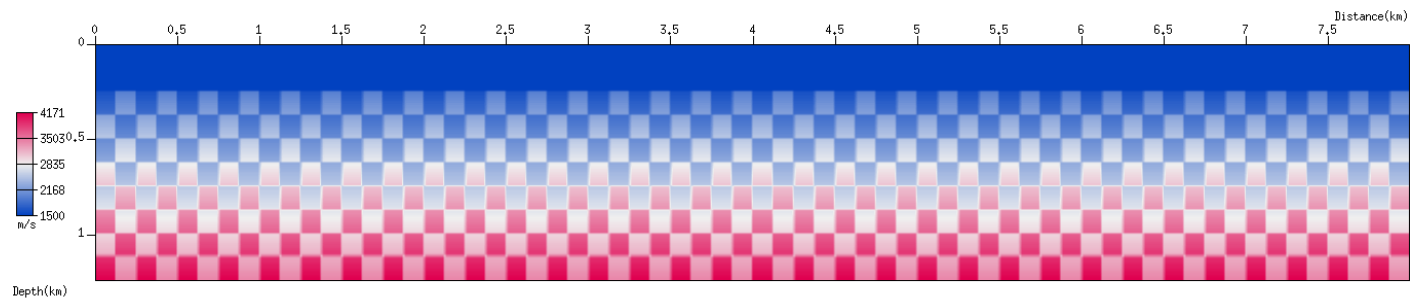
앞선 모델 분해 행렬 분석과 헤시안 행렬 특이값 분석을 통하여 우리는 주파수 영역 파형역산보다 라플라스-푸리에 영역 파형역산의 성능이 유사 선형 구간에서 더 뛰어난 이유를 실험적으로 분석하였다. 본 장에서는 2차원 인공 합성 자료에 대한 파형역산 실험을 통하여 주파수 영역과 라플라스-푸리에 영역 사이의 성능 비교를 한다. 우선 파형역산 성능을 비교하기 위하여 바둑판 모델 (checkerboard model) 실험을 진행하였다. 바둑판 모델 실험은 Spakman & Nolet에 의해 1988년 처음으로 소개되었다. 바둑판 모델은 주어진 간단한 배경속도에서 음, 양의 섭동(perturbation)을 주어 실제로는 존재할 수 없는 모델이다. 바둑판 모델 실험은 주로 토모그래피 역산에서 정확하게 물성치를 추정할 수 있는지를 판단하는데 주로 사용되고 있는 분석법이다. 하지만, 비선형 문제인 파형역산의 해의 비-유일성(non-uniqueness)측면에서 볼 때, 바둑판 모델 실험은 한계가 있는 분석법이다(Lévêque *et al.*, 1993). 그렇기 때문에 바둑판 모델 실험 외에도 공분산 분석과 앞선 수치 실험 방법 중 하나인 분해 행렬 분석을 같이 사용하기도 한다 (Graeber & Asch, 1999). 바둑판 모델 실험은 토모그래피뿐만 아니라 파형역산 분야에서도 알고리즘의 성능 비교 분석법으로도 적용된 사례가 있다(Warner *et al.*, 2016). 하지만, 바둑판 모델 실험은 주어지는 환경에 따라 비 이상체(anomalies)의 격자의 크기가 달라짐에 따라 그 결과도 일관적이지 못한 경우가 발생할 수 있다 (Lévêque *et al.*, 1993). 따라서 본 연구에서는 바둑판의 크기를 총 3가지로 나누어 실험하였다. 실험에 사용된 실제 모델은 그림 49처럼 격자의 크기를 125m, 250m, 500m를 가지는 모델을 사용하였다. 파형역산에 사용된 초기속도모델을 그림 49의 (d)와 같이 깊이가 깊어짐에 따라 단조롭게 속도가 증가하는 모델을 사용하였다. 파형역산과 정 전파 모델링에 사용된 공간 격자의 크기는 12.5m이다. 실험에 사용된 송신원의 개수는 155개이며 50m 간격으로 모델 상부에 깊이 10m 지점에 위치시켰다. 수신기는 송신원과 동일한 지점에 위치하며 고정시켜두고 실험하였다. 상부는 고정단 반사 경계 조건을 가지고

있으며, 상부를 제외한 모델의 경계면은 흡수 경계 조건을 적용하였다. 주파수 영역 파형역산에 사용된 주파수는 3Hz부터 10Hz까지 0.25Hz간격으로 사용하여 총 29개의 주파수 자료를 사용하였다. 라플라스-푸리에 영역의 경우 각 주파수마다 10개의 라플라스 감쇠상수를 적용하였으며, 0.001 s^{-1} 부터 4.5001 s^{-1} 까지 0.5 s^{-1} 간격으로 사용하여 총 사용된 복소주파수 자료는 290개이다. 본 실험에서는 헤시안 행렬의 역 행렬 계산을 가상 송신원(virtual source)의 대각 성분만을 사용하는 유사 헤시안(pseudo-Hessian)을 사용하였다. 유사 헤시안을 사용하는 경우는 그래디언트 기반의 방식(gradient based method)으로 볼 수 있으며 그래디언트 계산은 자코비안 행렬의 켈레 복소수 전치 행렬과 자료의 잔차의 곱으로 감쇠된 최소 제곱 해를 사용하지 않아도 자코비안 행렬로 결정되는 각 영역의 파형역산 성능을 판단하는데 무리가 없는 방법이다. 또한 본 실험에서는 동등한 비교를 위하여 l_2 -norm 목적함수와 로그목적함수를 사용하였다.

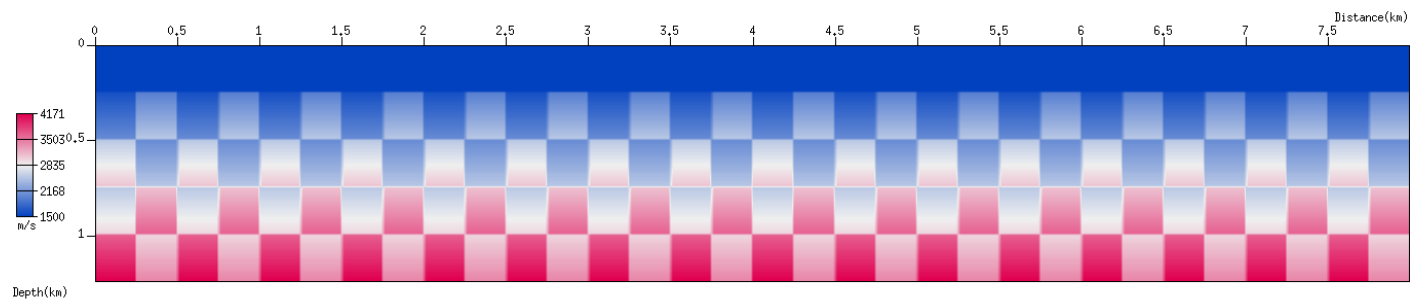
125m격자의 비 이상체를 가지는 경우에 대하여 우선 로그목적함수를 사용한 경우에서 주파수 영역 파형역산 결과(그림 50의 (a))와 라플라스-푸리에 영역 파형역산 결과(그림 50의 (b)) 모두 비슷한 역산결과를 보여주었다. 하지만 12목적함수를 사용한 경우, 주파수 영역 결과(그림 50의 (c))보다 라플라스-푸리에 영역 결과(그림 50의 (d))가 모델 하부의 양 끝단의 구조를 좀 더 안정적으로 추정할 것을 확인할 수 있다. 전체적인 역산 결과를 살펴보면 모델의 양 끝단의 불안정한 지역을 제외하고 목적함수에 따른 결과차이는 크게 보이지 않았으며 주파수 영역과 라플라스-푸리에 영역 역시 큰 차이를 찾아볼 수 없었다. 이렇게 모델의 하부 지역이 안정적으로 계산되지 않는 현상을 스마일 효과(smile effect)라고 불리 우며 이는 폴드(fold) 수의 부족 혹은 해당 지역에 자료가 부족한 이유 때문에 발생하는 현상이다. 다음으로 250m격자의 비 이상체를 가지는 경우, 로그목적함수를 사용한 두 영역의 결과(그림 51의 (a)와 (b))는 모두 비 이상체의 구조를 잘 추정한 것을 알 수 있다. l_2 -norm 목적함수를 사용한 결과(그림 51의 (c)와 (d))도 큰 차이는 없지만, 앞선 125m 격자의 경우와 마찬가지로 모델 하부의 양 끝단에 발생하는 스마일 효과를 발견할 수 있다. 격자의 크기가 500m인 경우에서도 각 목적함수마다 두 영역의 파형역산 결과(그림 52의 (a), (b), (c), (d))는 크게 나타나지 않았다. 하지만 각 목적함수에서 발생하는 스마일 효과는 주파수 영역보다 라플라스-푸리에 영역이 덜 발생하는 것을 확인할 수 있다. 이 또한 주파수 영역보다 상대적으로 자료를 더욱 많이 사용하는 라플라스-푸리에 영역의 장점이라고 볼 수 있는 실험결과이다. 수치적으로 실제 모델과의 모델 오차는 아래의 수식을 사용하여 계산하였다(Brossier *et al.*, 2009).

$$\text{model misfit} = \frac{1}{\text{number of nodes}} \left\| \frac{m_{\text{true}} - m_{\text{inv}}}{m_{\text{true}}} \right\| \quad (4.3. 1)$$

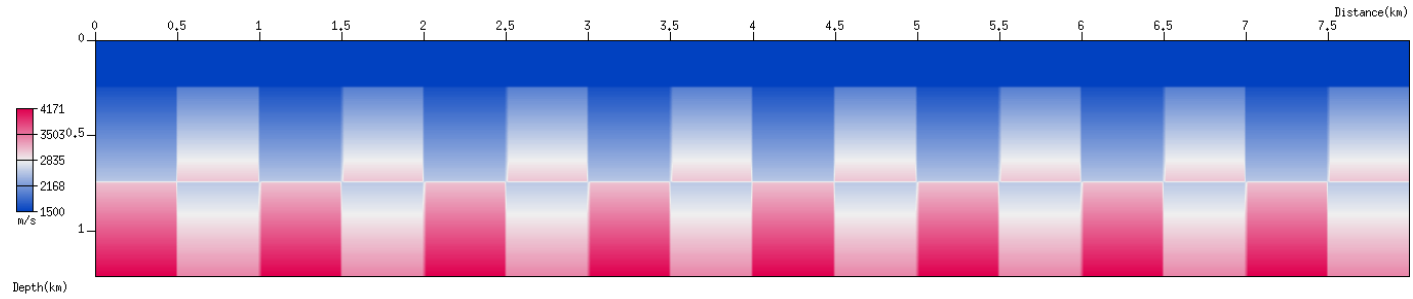
여기서 m_{true} 는 실제 속도 모델, m_{inv} 는 역산된 속도 모델, *number of nodes* 는 속도모델의 격자 개수이다. 모델 오차는 그 값이 0에 가까울수록 역산된 모델이 실제 모델과 가깝다는 뜻을 가진다. 표 10에 각 목적함수와 각 영역의 결과에 대한 속도 모델 오차를 볼 수 있다. 125m격자의 비 이상체의 모델을 실험한 결과에서 로그목적함수를 사용한 경우를 제외하고 모든 경우에서 라플라스-푸리에 영역이 주파수 역역보다 근사하게 속도 모델 오차가 낮은 값을 가지는 것을 알 수 있다. 하지만 이 값들은 굉장히 작은 차이를 가지며, 실제 결과를 눈으로 확인해보아도 주파수 영역과 라플라스-푸리에 영역사이의 큰 차이는 없는 것으로 확인된다. 하지만, 앞서 언급하였던 모델의 하부로 갈수록 자료 부족 때문에 발생하는 스마일 효과에 대하여 라플라스-푸리에가 주파수 영역보다 안정적이란 것을 본 실험을 통하여 확인할 수 있었다.



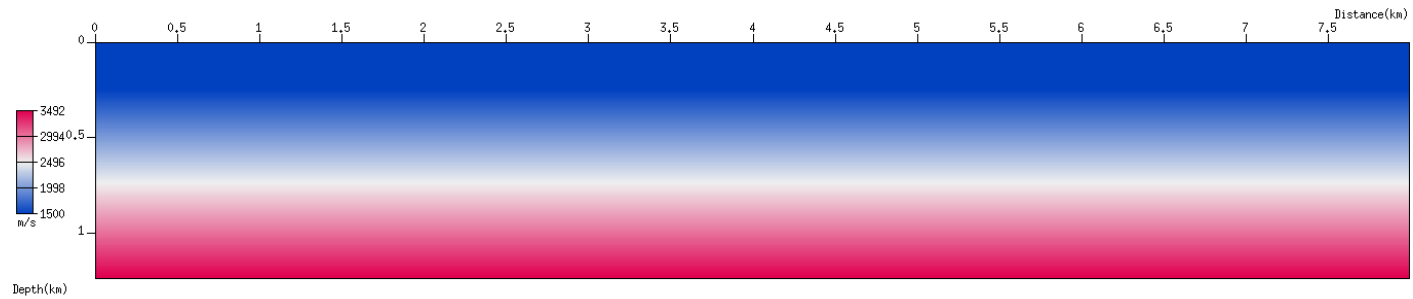
(a)



(b)

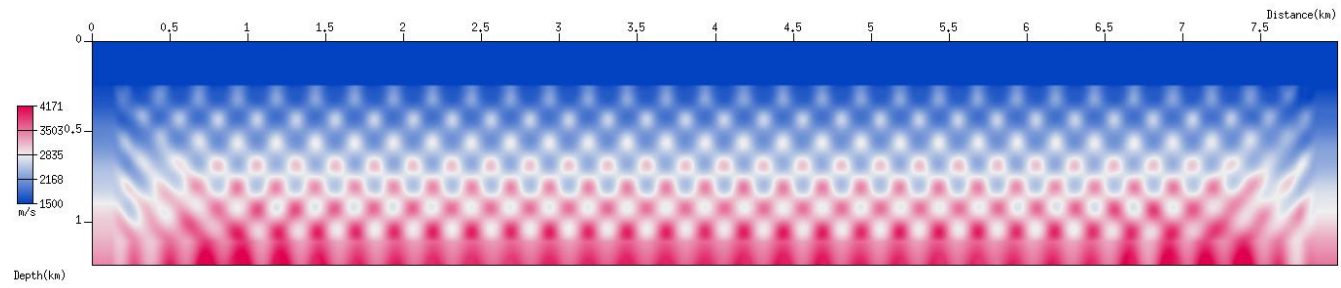


(c)

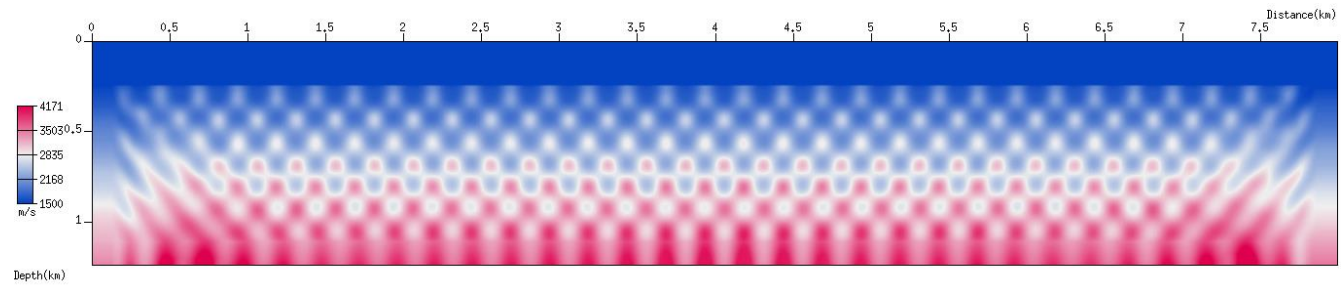


(d)

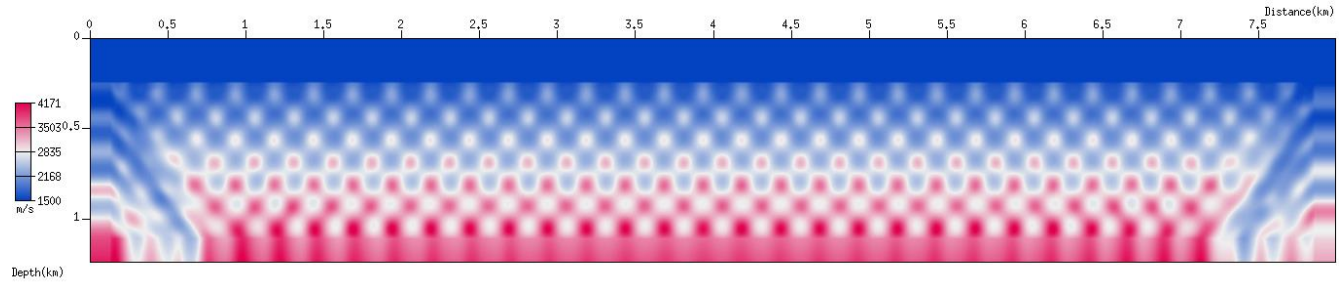
그림 49. 바둑판 모델의 비 이상체의 격자 크기가 (a) 125m, (b) 250m, (c)500m, (d) 파형역산에 사용된 초기속도모델



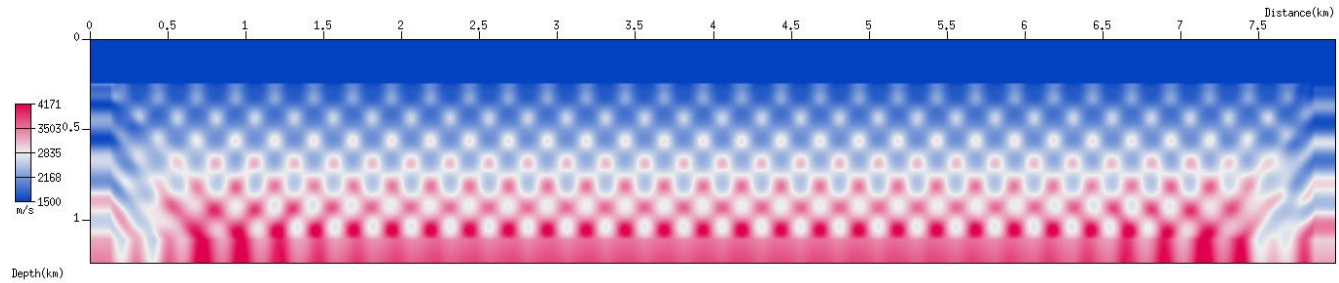
(a)



(b)

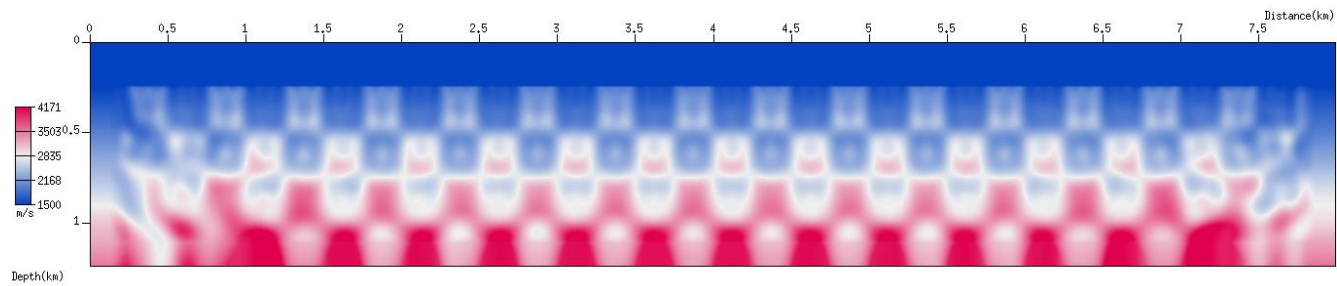


(c)

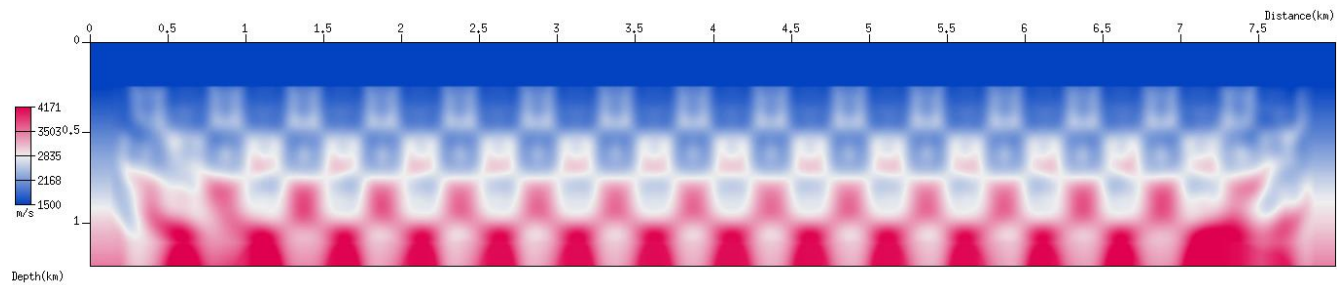


(d)

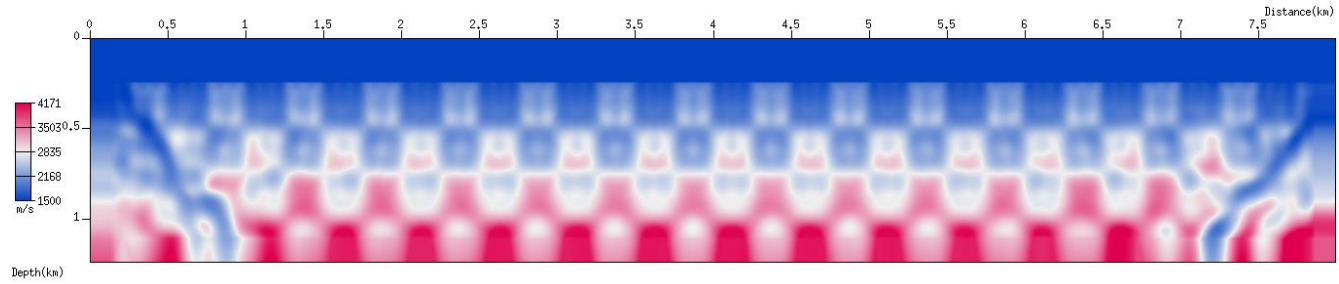
그림 50. 125m간격 비 이상체의 크기를 가지는 바둑판 모델 파형역산 결과; (a)로그목적함수를 사용한 주파수 영역, (b)로그목적함수를 사용한 라플라스-푸리에 영역, (c)l2-norm목적함수를 사용한 주파수 영역, (d)l2-norm목적함수를 사용한 라플라스-푸리에 영역



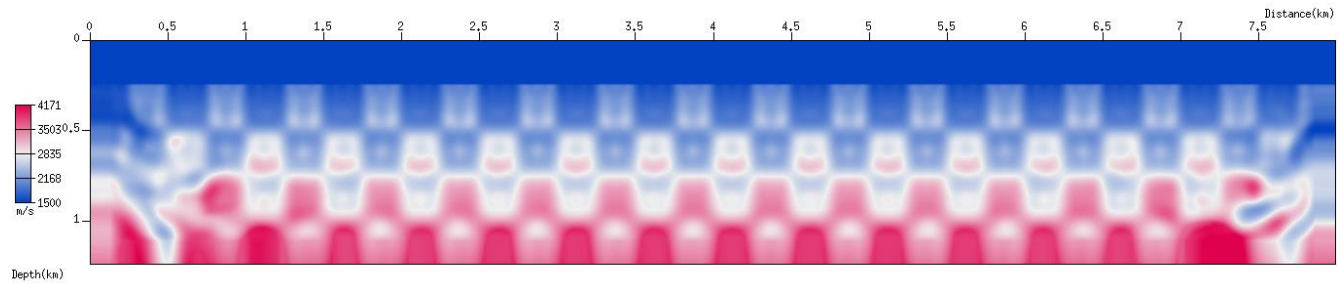
(a)



(b)

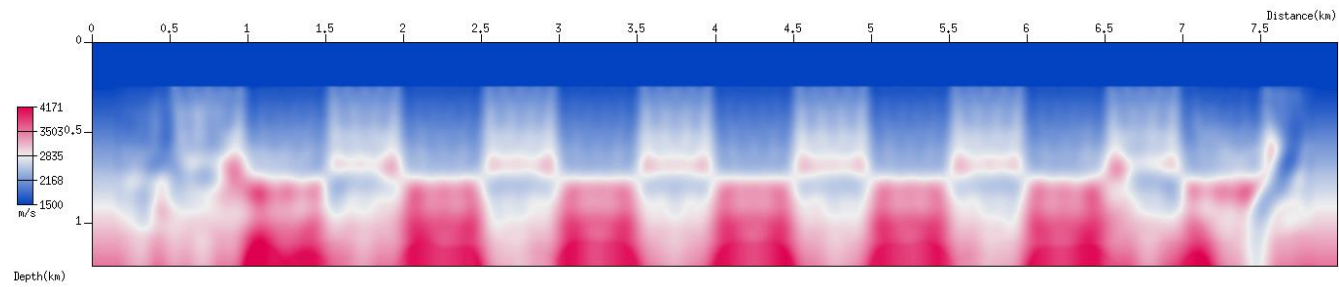


(c)

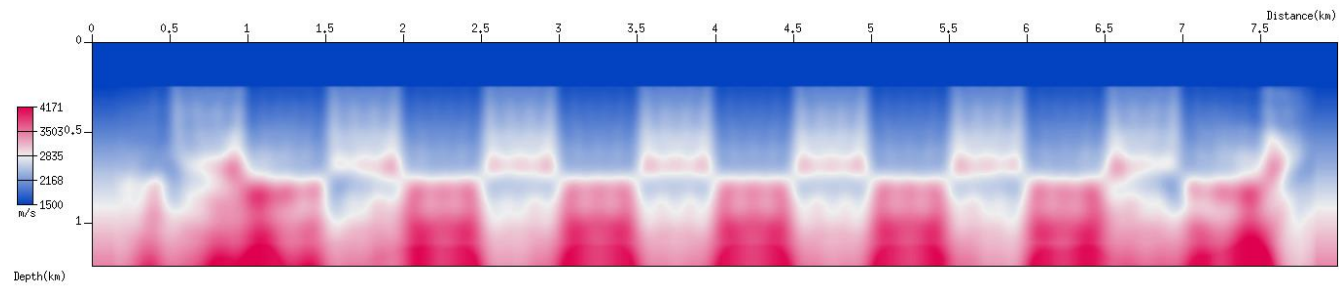


(d)

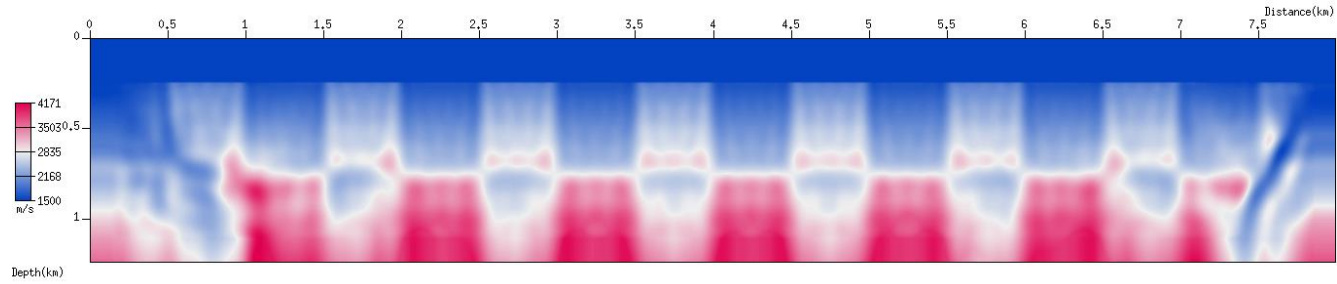
그림 51. 250m간격 비 이상체의 크기를 가지는 바둑판 모델 파형역산 결과; (a)로그목적함수를 사용한 주파수 영역, (b)로그목적함수를 사용한 라플라스-푸리에 영역, (c)l2-norm목적함수를 사용한 주파수 영역, (d)l2-norm목적함수를 사용한 라플라스-푸리에 영역



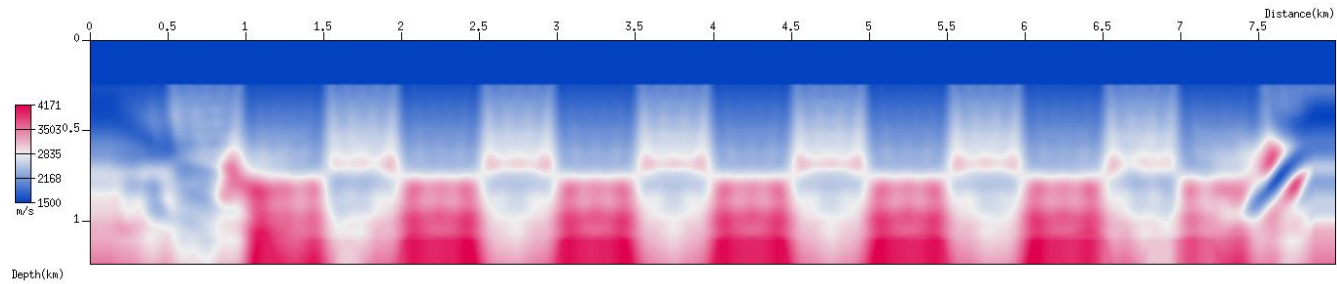
(a)



(b)



(c)



(d)

그림 52. 500m간격 비 이상체의 크기를 가지는 바둑판 모델 파형역산 결과; (a)로그목적함수를 사용한 주파수 영역, (b)로그목적함수를 사용한 라플라스-푸리에 영역, (c)l2-norm목적함수를 사용한 주파수 영역, (d)l2-norm목적함수를 사용한 라플라스-푸리에 영역

Model misfit error(size of anomalies: 125m)	
Initial model	8.322009
Frequency domain results (Logarithmic objective function)	4.923560
Laplace-Fourier domain results (Logarithmic objective function)	4.968244
Frequency domain results (l2-norm objective function)	5.645875
Laplace-Fourier domain results (l2-norm objective function)	5.093463
Model misfit error(size of anomalies: 250m)	
Initial model	8.518434
Frequency domain results (Logarithmic objective function)	3.630761
Laplace-Fourier domain results (Logarithmic objective function)	3.480407
Frequency domain results (l2-norm objective function)	4.565940
Laplace-Fourier domain results (l2-norm objective function)	3.760497
Model misfit error(size of anomalies: 500m)	
Initial model	8.608094
Frequency domain results (Logarithmic objective function)	3.399358
Laplace-Fourier domain results (Logarithmic objective function)	3.123250
Frequency domain results (l2-norm objective function)	4.342057
Laplace-Fourier domain results (l2-norm objective function)	3.714020

표 10. 비 이상체 격자 간격에 따른 각 영역에서의 속도 모델 오차

이어서 좀 더 복잡한 지형을 가지는 2차원 인공합성자료인 BP benchmark 자료에 대한 주파수 영역과 라플라스-푸리에 영역 실험을 통하여 어떤 영역의 파형역산이 안정적이고 정확하게 역산되는지 실험하였다. 실험에 사용된 실제 P파 속도 모델(그림 53)은 깊이 2km지점 이후부터 크게 3가지의 고속도 층과 저속도의 층이 작게 존재하는 것이 특징이다. 특히 중앙에 위치한 암염돔 내부의 저속도와 우측에 대칭적으로 존재하는 작은 고속도 매질을 역산하는 것이 관건이다. 가로 70km, 세로 11.95km의 큰 규모의 속도모델이며 파형 모델링과 역산에 사용된 공간격자는 50m로 설정하였다. 실험에 사용된 송신원과 수신기의 개수는 총 1348개를 50m간격으로 동일하게 사용하였다. 하지만 실제 파형역산을 계산할 때에는 한 송신원당 15km의 오프셋(offset)을 가지도록 설정하였다. 헤시안 행렬의 역행렬 계산을 위해 본 실험에서는 truncated 가우스-뉴턴법 (Gauss-Newton method)를 사용하였다. 앞선 바둑판 모델 실험에서는 근사화된 헤시안 행렬의 대각 성분만을 사용하는 유사 헤시안을 사용하여 목적함수의 그래디언트를 나누어 주었지만, 라플라스 혹은 라플라스-푸리에 영역 파형역산에서 유사 헤시안을 사용하는 경우 모델 업데이트의 해상도가 변지고 오차가 커지는 것을 방지하고자 본 실험에서는 truncated 가우스-뉴턴법을 적용하였다(Kwon *et al.*, 2017). 또한 정확한 비교를 위하여 주파수 영역 파형역산 역시 동일한 truncated 가우스-뉴턴법으로 모델 업데이트를 계산하였다. 또한 동등한 비교를 위하여 두 영역모두 로그 목적 함수와 l_2 -norm 목적함수를 모두 사용하여 실험 하였다.

실험에 사용된 주파수는 총 7개를 사용하였다. 3.0Hz부터 6Hz까지 0.5Hz 간격으로 사용하였다. 주파수 영역의 파형역산의 경우 감쇠 상수(attenuation constant)를 0.0으로 두었다. 라플라스-푸리에 영역의 파형역산의 경우 주파수 영역과 동일하게 7개의 주파수를 역산 하지만 각 주파수마다 총 10개의 라플라스 감쇠 상수를 적용하였다. 라플라스 감쇠 상수는 $0.001s^{-1}$ 부터 $4.501s^{-1}$ 까지 $0.5s^{-1}$ 를 간격으로

모든 주파수가 동일한 라플라스 감쇠 상수를 가지도록 설정하였다. 주파수 영역과 라플라스-푸리에 영역 파형역산 전략으로 각 주파수마다 10번의 반복회수를 설정하였고, 마지막 주파수인 6Hz까지 역산한 뒤에 다시 3Hz부터 역산을 총 4번 반복하였다. 기존의 라플라스-푸리에 연구에 의하면 감쇠된 파동장의 특성 때문에 사용할 수 없던 저주파수 성분까지 사용할 수 있지만, 본 연구에서는 라플라스-푸리에 영역과 주파수 영역 파형역산의 성능 비교이기 때문에 동등한 비교를 위하여 동일한 주파수 대역을 사용하였다. 실험에 사용된 초기 속도 모델은 라플라스 영역 파형역산을 통해 얻어진 결과를 사용하였다(그림 54).

로그 목적함수를 사용하여 각 영역의 파형역산을 진행한 결과 추정된 속도모델이 전체적으로 라플라스-푸리에 영역에서 안정적인 값을 얻을 수 있었다. 주파수 영역의 경우(그림 55), 깊이 2km지점까지의 저속도 부근에서도 약간의 수치적 잡음이 발생되었으며 전체적으로 깊이 2km지점 이후로 정확하게 속도모델을 구축하지 못하고 있다. 반면, 라플라스-푸리에 영역의 경우(그림 56), 주파수 영역보다 상대적으로 암염돔의 구조를 잘 찾아가고 있는 것을 확인할 수 있다. 또한 모델의 우측부분에 발생한 수치적 잡음이 눈에 띄게 나타나지 않는 것이 확인된다. l2-norm 목적함수를 사용한 경우 각 영역의 파형역산 결과는 로그 목적함수를 사용한 경우보다 상대적으로 역산결과가 좋지 못했다(그림 57, 그림 58). 특히 상부 저속도층에 많은 사이클 스킵핑(cycle skipping) 현상이 많이 발생하였다. 주파수 영역과 라플라스-푸리에 영역의 차이로는 주파수 영역 파형역산의 경우 하부 모델이 상당히 많이 망가졌으며 특히 왼쪽에 위치한 암염돔의 구조를 전혀 구축하지 못하였다. 반면 라플라스-푸리에 영역의 경우 암염돔의 상부 구조는 잘 구축해 나가고 있었으며 특히 모델의 하부 구조에서 수치적 오차가 덜 발생하는 상대적으로 안정적이 결과를 얻을 수 있었다. 두 가지의 목적함수에 대한 각 영역의 파형역산 결과를 식(4.3. 1)을 사용하여 실제모델과의 오차를 확인 해보았다. 표 11에서 볼 수 있듯이 로그 목적함수를 사용한 결과 두 영역모두 초기속도모델과 비교하여 실제 모델에 근접해 가는 것을 확인할 수 있고, 주파수 영역보다 라플라스-푸리에 영역이 조금 더 실제 모델과 근접해가는 것을 알

수 있다. l2-norm 목적함수를 사용한 경우, 주파수 영역의 파형역산 결과는 오히려 모델 오차가 더 커진 것을 알 수 있으며 라플라스-푸리에 영역은 초기속도모델의 모델 오차보다 줄어든 것을 확인할 수 있다. 복잡한 구조를 가진 2차원 인공합성자료 실험을 통해 우리는 저주파수 성분을 사용하지 않고 동일한 주파수 대역에서의 주파수 영역과 라플라스-푸리에 영역 파형역산의 성능을 비교하였다. 앞선 수치예제들과 마찬가지로 모든 경우에서 라플라스-푸리에 영역의 파형역산 성능이 안정적이고 우수한 것을 확인하였다. 본 2차원 BP benchmark 모델 실험의 경우, 실험 결과들은 초기속도모델에 따라 그 결과들이 달라질 수 있으며, 사용하는 주파수 선택 전략을 어떻게 선택하느냐에 따라 달라질 수 있지만 본 실험의 목적은 주어진 동일한 환경에서 라플라스-푸리에 영역과 주파수 영역의 비교임을 밝힌다.

Model misfit error	
Initial velocity model (그림 54)	6.987593
Inverted velocity model in the frequency domain using logarithmic objective function (그림 55)	6.742909
Inverted velocity model in the Laplace-Fourier domain using logarithmic objective function (그림 56)	6.089656
Inverted velocity model in the frequency domain using l2-norm objective function (그림 57)	8.474467
Inverted velocity model in the Laplace-Fourier domain using l2-norm objective function (그림 58)	6.537118

표 11. BP 모델 실험에서 각 영역의 파형역산 결과에 대한 실제 모델과의 속도 모델 오차(model misfit)

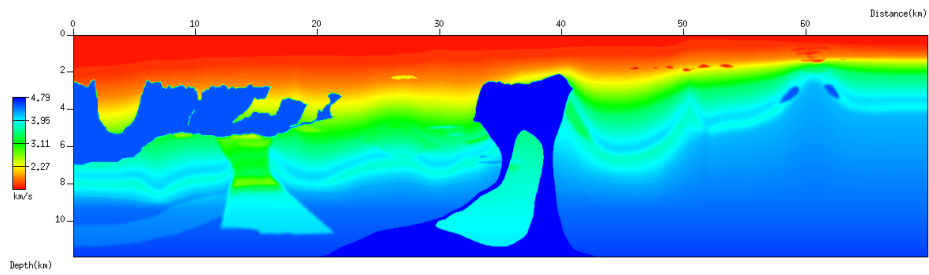


그림 53. 2차원 BP benchmark 실제 P파 속도 모델

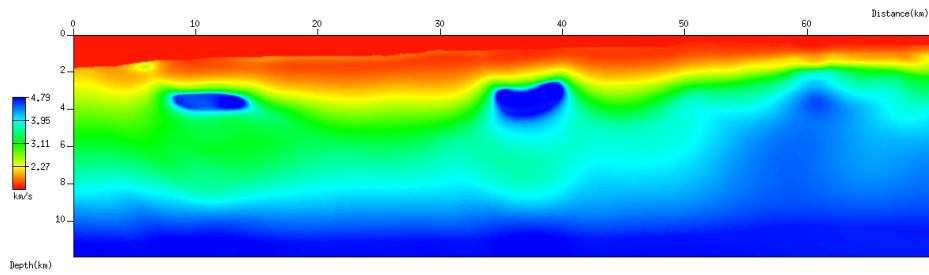


그림 54. 2차원 BP실험 초기 속도 모델

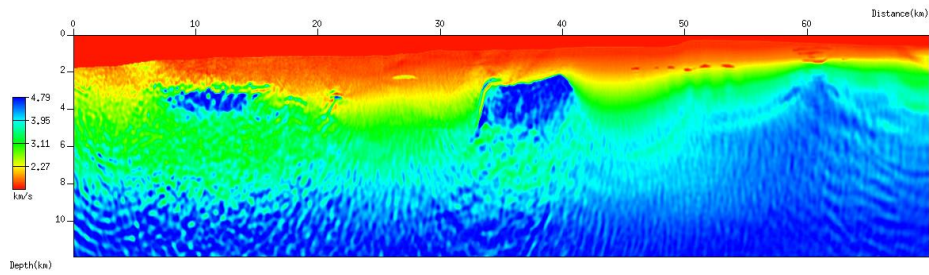


그림 55. 2차원 BP 실험 주파수 영역 파형역산 결과 (로그목적함수)

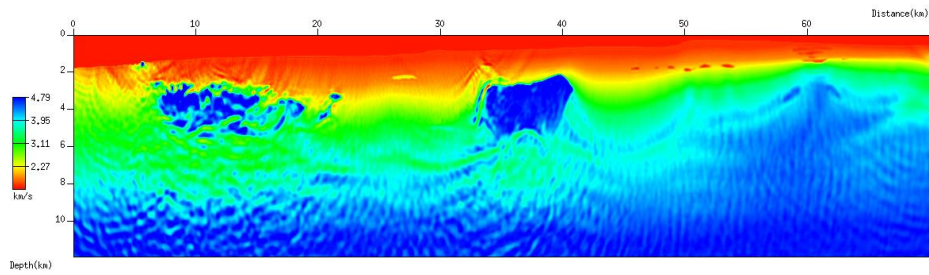


그림 56. 2차원 BP 실험 라플라스-푸리에 영역 파형역산 결과 (로그목적함수)

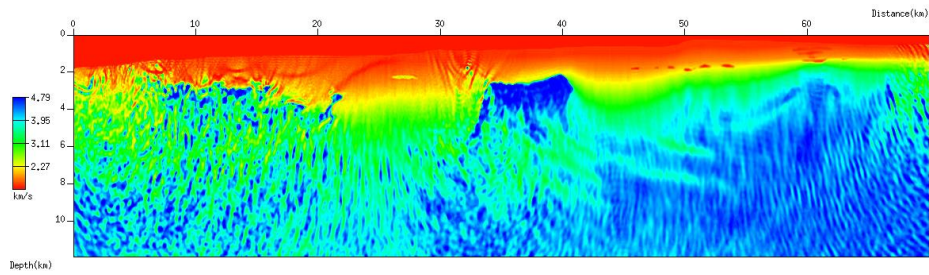


그림 57. 2차원 BP 실험 주파수 영역 파형역산 결과 (l_2 -norm 목적함수)

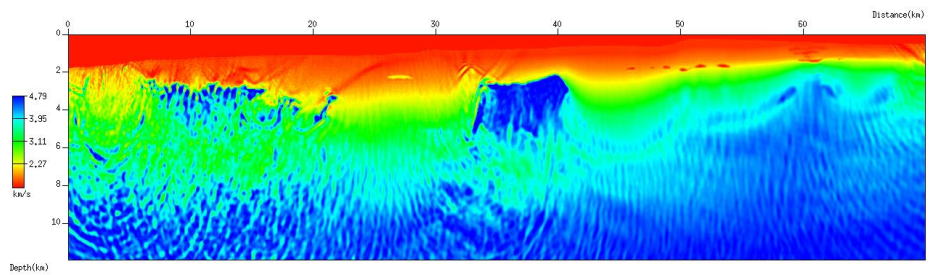


그림 58. 2차원 BP 실험 라플라스-푸리에 영역 파형역산 결과 (l_2 -norm 목적함수)

제 5 장 결 론

본 연구를 통해 우리는 유사 선형 구간에 대하여 라플라스-푸리에 영역 파형역산이 왜 주파수 영역 파형역산보다 우수한 성능을 가지는지를 수치적이고 해석적으로 분석하였다. 기존의 라플라스 혹은 라플라스-푸리에 영역 파형역산을 사용한 연구들은 주파수 영역 파형역산보다 뛰어난 그 이유를 감쇠된 파동장으로부터의 새로운 저주파수 성분의 생성, 평활화한 자료의 잔차와 그라디언트의 조합, 초기속도모델에 따른 장파장 성분의 역전파 파동장 등 현상에 집중된 분석을 바탕으로 그 우수성을 주장해 왔다. 반면 기존의 연구와는 달리 현상에만 집중하지 않고 그동안 라플라스-푸리에 영역 파형역산에는 적용된 적 없었던 모델 분해 행렬 분석과 특이값 분해 분석을 적용하여 왜 라플라스-푸리에 영역 파형역산이 주파수 영역 파형역산보다 우수할 수 있는지를 명확하게 수치적으로 분석하였다.

모델 분해 행렬은 실제 모델값과 추정된 모델값 사이의 일종의 필터링이라고 볼 수 있다. 이를 분석함으로써 우리가 다루는 선형화된 파형역산 시스템의 안정성과 그 성능을 판단할 수 있다. 구성된 파형역산 시스템의 모델 분해 행렬이 단위행렬에 가까울수록 실제 모델값과 추정된 모델값이 거의 유사해지고 이는 해당 시스템의 해가 잘 추정될 수 있다는 뜻이 된다. 우리는 라플라스-푸리에 영역에서의 근사화된 해석적해를 바탕으로 라플라스-푸리에 영역과 주파수 영역을 비교 및 분석 하였다. 실험 결과, 만약 우리가 사용할 수 있는 주파수가 0Hz부터 특정 최대 주파수까지 이상적으로 모두 사용할 수 있다면, 우리가 필요로하는 공간에 대한 파수 역시 모두 사용할 수 있게되며 계산된 모델 분해 행렬이 단위행렬에 가깝게 계산되었다. 즉, 모든 주파수 성분을 사용할 경우 우리는 별다른 요령 없이 단순한 주파수 영역 파형역산 만으로도 완벽하게 지하 물성치를 추정할 수 있게 된다. 하지만 대부분의 현장자료는 낮은 신호 대 잡음비로 저주파수 성분을 사용할 수 없게 된다. 따라서 우리는 저주파수 대역을 사용할 수

없는 경우에 대하여 주파수 영역과 라플라스-푸리에 영역의 모델 분해 행렬을 계산하였고, 하나의 라플라스 감쇠 상수를 사용하는 경우에는 주파수 영역과 라플라스-푸리에 영역의 성능이 비슷한 것을 확인하였다. 하지만, 라플라스 감쇠 상수를 많이 사용할수록 모델 분해 행렬의 비 대각 성분이 감소하는 것을 확인 하였다. 즉, 많이 라플라스 감쇠 상수를 사용함으로써 우리가 다루는 과형역산 시스템이 좀 더 정확하게 물성치를 추정할 수 있게 되는 것이다. 이러한 이유는 여러 가지의 라플라스 감쇠 상수를 사용함으로써 한정적으로 취득된 자료의 다양한 변화를 주어 과형역산 시스템(자코비안 행렬)을 구성하는 자료들이 선형 독립 기저인 벡터들이 증가하게 되고, 상대적으로 주파수 영역의 과형역산 자코비안 행렬보다 라플라스-푸리에 영역의 자코비안 행렬이 유의미한 값들이 많아지기 때문이다.

또 다른 분석으로 우리는 특이값 분해를 적용하였다. 특이값 분해는 어떤 시스템의 안정성을 분석하는데 사용되는 강력한 도구이다. 따라서 본 연구에서는 추정하고자하는 물성치와 취득된 자료 사이를 이어주는 자코비안 행렬이 충분히 의미 있는 값들로 구성되어 있는지를 분석하는 것이 필요하다. 또한 가우스-뉴턴법에 근거하여 최종 물성치를 계산하는 경우, 최종 해는 헤시안 행렬의 역행렬과 목적함수의 그래디언 벡터의 곱으로 표현할 수 있는데, 여기서 헤시안 행렬이 특이 행렬인지 혹은 역행렬을 계산하였을 때 충분히 유의미한 값들로 계산되는지 분석하기 위하여 자코비안 행렬의 특이값 분해를 실행하였다. 이를 위해 우리는 1차원과 2차원 인공합성자료에 대하여 라플라스-푸리에 영역과 주파수 영역에서 형성되는 자코비안 행렬의 특이값과 헤시안 행렬의 조건수를 계산하였다. 그 결과, 앞서 모델 분해 행렬 분석과 마찬가지로 다양한 라플라스 감쇠 상수를 사용할수록 라플라스-푸리에 영역의 자코비안 행렬의 특이값 들이 주파수 영역의 자코비안 행렬의 특이값들 보다 큰 값을 가지 는 것을 확인할 수 있었고, 헤시안 행렬의 조건수 또한 더 낮아 지는 것을 확인할 수 있었다. 계산된 자코비안 행렬의 특이값들은 물성치를 역산하는데 있어서 그 값이 전반적으로 큰 값을 가지는 것이 중요하므로 이는 라플라스-푸리에 영역 과형역산이 주파수 영역보다 더 많은 모델 매개변수에 대하여

안정적으로 물성치를 추정할 수 있다는 뜻이 된다. 또한 추가적으로 라플라스 감쇠 상수를 조밀하게 사용할수록 특이값들이 커지는 것을 확인할 수 있었다. 즉, 자코비안 행렬의 특이값들이 커짐으로써 우리가 표현하고자 하는 모델 부분 공간을 더욱 많이 생성하게 되고 또한 안정적으로 헤시안 행렬의 역행렬이 계산된다고 해석할 수 있다. 이를 통해 동일한 주파수 대역의 자료를 사용하는 경우, 다양한 라플라스 감쇠 상수를 사용하여 더 많은 복소 주파수 자료를 생성하는 것이 안정적인 파형역산 결과를 도출할 수 있다는 결론을 얻을 수 있다. 또한 이는 라플라스영역 파형역산 전략 연구에서 주장하는 라플라스 감쇠 상수를 조밀하게 사용하는 것이 좋다는 주장(권정민, 2017)을 이번 특이값 분해 분석을 통해 다시 한 번 검증되는 연구 결과이다.

2차원 인공합성자료에 대한 실험결과역시 라플라스-푸리에 영역 파형역산이 주파수 영역 파형역산보다 우수한 결과를 도출하였다. 실험에 사용된 모델은 총 두 가지로, 첫 번째로 사용한 바둑판 형태의 모델은 주로 토모그래피 분야에서 그 성능을 판단하기 위해 사용되는 모델이다. 바둑판 모델 실험을 통해 라플라스-푸리에 영역 파형역산이 주파수 영역 파형역산과 비교해서 스마일 효과에 덜 민감한 것을 확인하였고, 이어서 고속도층이 분포되어 있는 BP 모델에 대해서도 라플라스-푸리에 영역 파형역산이 주파수 영역 파형역산보다 안정적으로 속도 모델을 추정하는 것을 확인하였다.

본 연구에서 새롭게 제시한 분석법을 통하여 라플라스-푸리에 영역 파형역산이 감쇠된 파동장의 새롭게 생성되는 저주파수 성분 때문에 주파수 영역 파형역산보다 우수하다는 이점 외에도 유사 선형 구간에서 저주파수 성분을 사용하지 않아도 라플라스-푸리에 영역이 우수하다는 현상을 분석하였다. 본 연구에 사용된 분석법들은 기존의 현상에 입각한 제한적인 분석에서 벗어나 수치적이고 명확한 분석으로 복소 주파수의 중요성을 밝혀내었다. 감쇠된 파동장에서 새롭게 생성되는 저주파수 성분 또한 라플라스-푸리에 영역 파형역산이 주파수 영역 파형역산보다 물성치를 좀 더 안정적으로 추정할 수 있는 이유가 되지만, 본 연구를 통해

저주파수를 사용하지 않아도 라플라스-푸리에 영역 파형역산이 주파수 영역 파형역산보다 우수하다는 것을 분석해내었다. 그 이유는 라플라스 감쇠 상수를 통해 자코비안 행렬을 구성하는 벡터들이 서로 선형 독립 기저의 형태를 가지게 되며 이는 곧 우리가 추정하고자하는 모델의 부분 공간을 더욱 많이 생성하게 되고, 제한된 자료를 더욱 다양하게 사용하는 효과를 가져 온다고 볼 수 있다.

참고 문헌

Assous, F., and F. Collino. "A numerical method for the explanation of sensitivity: the case of the identification of the 2D stratified elastic medium." *Inverse problems* 6.4 (1990): 487.

Bae, Ho Seuk, et al. "2D acoustic-elastic coupled waveform inversion in the Laplace domain." *Geophysical Prospecting* 58.6 (2010): 997-1010.

Bednar, J. Bee, Changsoo Shin, and Sukjoon Pyun. "Comparison of waveform inversion, part 2: phase approach." *Geophysical Prospecting* 55.4 (2007): 465-475.

Ben-Hadj-Ali, Hamed, Stéphane Operto, and Jean Virieux. "Velocity model building by 3D frequency-domain, full-waveform inversion of wide-aperture seismic data." *Geophysics* 73.5 (2008): VE101-VE117.

Blacic, Tanya M., et al. "Smooth 2-D ocean sound speed from Laplace and Laplace-Fourier domain inversion of seismic oceanography data." *Geophysical Research Letters* 43.3 (2016): 1211-1218.

Bleibinhaus, Florian, Ryan W. Lester, and John A. Hole. "Applying waveform inversion to wide-angle seismic surveys." *Tectonophysics* 472.1 (2009): 238-248.

Brenders, A. J., and R. G. Pratt. "Full waveform tomography for lithospheric imaging: Results from a blind test in a realistic crustal model." *Geophysical Journal International* 168.1 (2007): 133-151.

Brossier, Romain, Stéphane Operto, and Jean Virieux. "Seismic imaging of complex onshore structures by 2D elastic frequency-domain full-waveform inversion." *Geophysics* 74.6 (2009): WCC105-WCC118.

Bunks, Carey, et al. "Multiscale seismic waveform inversion." *Geophysics* 60.5 (1995): 1457-1473.

Cho, Yongchae, et al. "Laplace–Fourier-Domain Full Waveform Inversion of Deep-Sea Seismic Data Acquired with Limited Offsets." *Pure and Applied Geophysics* 173.3 (2016): 749-773.

Choi, Yunseok, and Tariq Alkhalifah. "Frequency-domain waveform inversion using the phase derivative." *Geophysical Journal International* 195.3 (2013): 1904-1916.

Chi, Benxin, Liangguo Dong, and Yuzhu Liu. "Full waveform inversion method using envelope objective function without low frequency data." *Journal of Applied Geophysics* 109 (2014): 36-46.

de Nicolao, Andrea, Giuseppe Druifuca, and Fabio Rocca. "Eigenvalues and eigenvectors of linearized elastic inversion." *Geophysics* 58.5 (1993): 670-679.

Dongarra, Jack J., et al. LINPACK users' guide. Society for Industrial and Applied Mathematics, 1979.

Graeber, Frank M., and Günter Asch. "Three-dimensional models of P wave velocity and P-to-S velocity ratio in the southern central Andes by simultaneous inversion of local earthquake data." *Journal of Geophysical Research: Solid Earth* 104.B9 (1999): 20237-20256.

Ha, Wansoo, and Changsoo Shin. "Proof of the existence of both zero-and low-frequency information in a damped wavefield." *Journal of Applied Geophysics* 83 (2012): 96-99.

Ha, Wansoo, et al. "Acoustic full waveform inversion of synthetic land and

marine data in the Laplace domain." *Geophysical Prospecting* 58.6 (2010): 1033-1048.

Ha, Wansoo, Wookeen Chung, and Changsoo Shin. "Pseudo-Hessian matrix for the logarithmic objective function in full waveform inversion." *Journal of Seismic Exploration* 21.3 (2012): 201.

Hu, Wenyi, Aria Abubakar, and Tarek M. Habashy. "Simultaneous multifrequency inversion of full-waveform seismic data." *Geophysics* 74.2 (2009): R1-R14.

Jaiswal, Priyank, et al. "2-D traveltimes and waveform inversion for improved seismic imaging: Naga Thrust and Fold Belt, India." *Geophysical Journal International* 173.2 (2008): 642-658.

Jun, Hyunggu, et al. "Laplace-Fourier-domain elastic full-waveform inversion using time-domain modeling." *Geophysics* (2014).

Kamei, R., R. G. Pratt, and T. Tsuji. "On acoustic waveform tomography of wide-angle OBS data—strategies for pre-conditioning and inversion." *Geophysical Journal International* 194.2 (2013): 1250-1280.

Kamei, Rie, R. Gerhard Pratt, and Takeshi Tsuji. "Misfit functionals in Laplace-Fourier domain waveform inversion, with application to wide-angle ocean bottom seismograph data." *Geophysical Prospecting* 62.5 (2014): 1054-1074.

Kwon, Jungmin, et al. "Interrelation between Laplace constants and the gradient distortion effect in Laplace-domain waveform inversion." *Geophysics* 82.2 (2016): R31-R47.

Lailly, Patrick. "The seismic inverse problem as a sequence of before stack

migrations." (1983): 206-220.

Lee, Ki Ha, and Hee Joon Kim. "Source-independent full-waveform inversion of seismic data." *Geophysics* 68.6 (2003): 2010-2015.

Lévêque, Jean-Jacques, Luis Rivera, and Gérard Wittlinger. "On the use of the checker-board test to assess the resolution of tomographic inversions." *Geophysical Journal International* 115.1 (1993): 313-318.

Marfurt, Kurt J. "Accuracy of finite-difference and finite-element modeling of the scalar and elastic wave equations." *Geophysics* 49.5 (1984): 533-549.

Martinez, Ruben D., and GEORGE A. McMECHAN. " τ -p data for viscoelastic media-Part 2: linearized inversion." *Geophysical Prospecting* 39.2 (1991): 157-181.

Menke, William. "The resolving power of cross-borehole tomography." *Geophysical Research Letters* 11.2 (1984): 105-108.

Menke, William. *Geophysical data analysis: discrete inverse theory: MATLAB edition*. Vol. 45. Academic press, 2012.

Métivier, Ludovic, et al. "Full waveform inversion and the truncated Newton method." *SIAM Journal on Scientific Computing* 35.2 (2013): B401-B437.

Miller, D., M. Oristaglio, and G. Beylkin. "A new slant on seismic imaging: Migration and integral geometry." *Geophysics* 52.7 (1987): 943-964.

Mora, Peter. "Nonlinear two-dimensional elastic inversion of multioffset seismic data." *Geophysics* 52.9 (1987): 1211-1228.

Operto, S., et al. "Quantitative imaging of complex structures from dense wide-aperture seismic data by multiscale traveltime and waveform inversions: a case study." *Geophysical prospecting* 52.6 (2004): 625-651.

Plessix, R-E., and Q. Cao. "A parametrization study for surface seismic full waveform inversion in an acoustic vertical transversely isotropic medium." *Geophysical Journal International* 185.1 (2011): 539-556.

Pratt, R. Gerhard, Changsoo Shin, and G. J. Hick. "Gauss–Newton and full Newton methods in frequency–space seismic waveform inversion." *Geophysical Journal International* 133.2 (1998): 341-362.

Pratt, R. Gerhard. "Seismic waveform inversion in the frequency domain, Part 1: Theory and verification in a physical scale model." *Geophysics* (2012).

Pyun, Sukjoon, Changsoo Shin, and J. B. Bednar. "Comparison of waveform inversion, part 3: amplitude approach." *Geophysical Prospecting* 55.4 (2007): 477-485.

Pyun, Sukjoon, Woohyun Son, and Changsoo Shin. "3D acoustic waveform inversion in the Laplace domain using an iterative solver." *Geophysical Prospecting* 59.3 (2011): 386-399.

Sheen, Dong-Hoon, et al. "Time domain Gauss–Newton seismic waveform inversion in elastic media." *Geophysical Journal International* 167.3 (2006): 1373-1384.

Shen, Peng, and William W. Symes. "Automatic velocity analysis via shot profile migration." *Geophysics* 73.5 (2008): VE49-VE59.

Shin, Changsoo, and Dong-Joo Min. "Waveform inversion using a

logarithmic wavefield." *Geophysics* 71.3 (2006): R31-R42.

Shin, Changsoo, and Young Ho Cha. "Waveform inversion in the Laplace domain." *Geophysical Journal International* 173.3 (2008): 922-931.

Shin, Changsoo, Seonghyung Jang, and Dong-Joo Min. "Improved amplitude preservation for prestack depth migration by inverse scattering theory." *Geophysical prospecting* 49.5 (2001): 592-606.

Shin, Changsoo, Sukjoon Pyun, and J. Bednar. "Comparison of waveform inversion, part 1: conventional wavefield vs logarithmic wavefield." *Geophysical Prospecting* 55.4 (2007): 449-464.

Shin, Changsoo, Sukjoon Pyun, and J. Bednar. "Comparison of waveform inversion, part 1: conventional wavefield vs logarithmic wavefield." *Geophysical Prospecting* 55.4 (2007): 449-464.

Shipp, Richard M., and Satish C. Singh. "Two-dimensional full wavefield inversion of wide-aperture marine seismic streamer data." *Geophysical Journal International* 151.2 (2002): 325-344.

Silvestrov, Ilya, and Vladimir Tcheverda. "SVD analysis in application to full waveform inversion of multicomponent seismic data." *Journal of Physics: Conference Series*. Vol. 290. No. 1. IOP Publishing, 2011.

Silvestrov, Ilya, et al. "Full-waveform inversion for macro velocity model reconstruction in look-ahead offset vertical seismic profile: numerical singular value decomposition-based analysis." *Geophysical Prospecting* 61.6 (2013): 1099-1113.

Sirgue, Laurent, and R. Gerhard Pratt. "Efficient waveform inversion and imaging: A strategy for selecting temporal frequencies." *Geophysics* 69.1 (2004): 231-248.

Snieder, Roel, and Jeannot Trampert. "Inverse problems in geophysics." *Wavefield inversion*. Springer, Vienna, 1999. 119-190.

Spakman, W., and G. Nolet. "Imaging algorithms, accuracy and resolution in delay time tomography." *Mathematical geophysics*. Springer Netherlands, 1988. 155-187.

Symes, W. W., and James J. Carazzone. "Velocity inversion by differential semblance optimization." *Geophysics* 56.5 (1991): 654-663.

Tarantola, Albert. "Inversion of seismic reflection data in the acoustic approximation." *Geophysics* 49.8 (1984): 1259-1266.

Tarantola, Albert. *Inverse problem theory and methods for model parameter estimation*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2005.

Tryggvason, Ari, Sigurður Th Rögnvaldsson, and Ólavur G. Flóvenz. "Three-dimensional imaging of the P-and S-wave velocity structure and earthquake locations beneath Southwest Iceland." *Geophysical Journal International* 151.3 (2002): 848-866.

Vidyasagar, Mathukumalli. *Nonlinear systems analysis*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2002.

Virieux, Jean, and Stéphane Operto. "An overview of full-waveform inversion in exploration geophysics." *Geophysics* 74.6 (2009): WCC1-WCC26.

Warner, Michael, and Lluís Guasch. "Adaptive waveform inversion: Theory." *Geophysics* (2016).

Xia, Jianghai, Richard D. Miller, and Yixian Xu. "Data Resolution Matrix And Model Resolution Matrix Of Rayleigh-Wave Inversion Using A Damped Least-Square Method." 21st EEGS Symposium on the Application of Geophysics to Engineering and Environmental Problems. 2008.

Zhang, H., and C. H. Thurber. "Estimating the model resolution matrix for large seismic tomography problems based on Lanczos bidiagonalization with partial reorthogonalization." *Geophysical Journal International* 170.1 (2007): 337-345.

권정민. Wavepath analysis and strategies for waveform inversion in the Laplace domain. Diss. 서울대학교 대학원, 2017.

Abstract

Advantages of Laplace-Fourier-domain waveform inversion over frequency-domain waveform inversion in the quasi-linear zones

Hyojoon Jin

Department of Energy Systems Engineering

The Graduate School

Seoul National University

Accurate underground velocity model estimation is essential for successful imaging of subsurface structures. There are conventional methods for estimating the subsurface velocity model, such as reflected wave tomography, migration velocity analysis, etc. However, these conventional methods give subjective results that depend on the user's choice and also provide low resolution results. On the other hand, Full waveform inversion(FWI) considering all waveforms of the observed data based on the wave equation provides higher resolution and relative objective results than the conventional method. However, FWI has a problem sensitive to the initial velocity model. Commonly used frequency-domain waveform inversion can not directly address the sensitive problems of initial model due to the absence of low frequency components of the observed data. However, the Laplace-Fourier-domain waveform inversion using the attenuated wavefield using a complex frequency can build a long-wavelength model even if the observed data does not have low frequency components. This is because the low frequency components of the attenuated wavefield are newly generated and the gradient of the velocity model has a smooth tendency. However, mentioned analysis is not a general approach, and there is merely a phenomenon-only analysis and lacks other analysis besides low-frequency components. In this study, we compared and analyzed the model resolution matrix of the Laplace-Fourier domain and the frequency domain, which have not been applied previously, and singular values of the Jacobian matrix of

each domain using singular value decomposition(SVD). Through numerical analysis, we have clearly analyzed whether the Laplace-Fourier domain waveform inversion performs better than the frequency-domain waveform inversion. The model resolution matrix is widely used in various fields besides geophysics as a tool to determine the stability of the linear system and how the estimated physical properties are similar to the actual physical models. We compared the model resolution matrix in the Laplace-Fourier domain and the conventional frequency domain considering the real situation that low frequencies can not be used and confirmed that the performance can be best when using a large number of complex frequencies. The SVD is also a powerful tool used to characterize linear or nonlinear systems. In this study, the SVD is applied to the Jacobian matrices in the frequency domain and the Laplace-Fourier domain. All experimental results show that the singular values of the Jacobian matrix of the Laplace-Fourier domain are more significant than those of the frequency domain. As a result, the reason that the Laplace-Fourier domain waveform inversion can be superior to the conventional frequency domain waveform inversion in the case of not using the low frequency is that by using various Laplace damping constants, we make various changes to the limited data and reconstruct Jacobian matrices with linear independent basis vectors. That is, the Jacobian matrix of the Laplace-Fourier domain is composed of a relatively large number of linear independent basis than the Jacobian matrix of the conventional frequency domain, which span more of the subspace of the model. Also, the Laplace-Fourier-domain Jacobian matrix composed of relatively large singular values means that the inverse matrix calculation of the Hessian matrix can be stable when the model is estimated based on the Gauss-Newton method. Through this research, we propose a new study that can utilize the data of limited frequency bandwidth by using the complex frequency and can stabilize the waveform inversion even when the low frequency is not used.

Keywords: Laplace-Fourier domain, Waveform inversion, Model resolution matrix, Singular value decomposition (SVD)

Student Number: 2015-31062